3. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Musterlösung für die Aufgaben 10c*) und 12

Aufgabe 10 c*) Das gesuchte Kriterium lautet:
Genau dann ist $F = \{(a,b),(c,d)\}$ ein EZS von $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \otimes)$, wenn gilt

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \{1, -1\}$$

12. Aufgabe: Jede beliebige Untergruppe von $(G, \star)$ ist abgeschlossen bzgl. $\star$.
Nun die Umkehrung: Sei $\emptyset \neq U \subseteq G$ eine <u>endliche</u> Teilmenge. Z.z.: $U \leq (G, \star)$.

UG$_1$) U ist nach Voraussetzung abgeschlossen bzgl. $\star$.

UG$_2$) Sei $a \in U$ beliebig. Dann folgt

$$(\star) \quad a^{(n)} \in U \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Beweis durch vollständige Induktion nach $n \geq 1$:
$\underline{\boldsymbol{n = 1}}$ $\quad a^{(1)} = a \in U$
$\underline{\boldsymbol{n \longrightarrow n+1}}$ Sei $n \geq 1$ beliebig, und gelte $\underline{a^{(n)} \in U}$. Dann folgt, da U abgeschlossen ist,

$$a^{(n+1)} \;=\; a^{(n)} \star a \in U$$

Da U nach Voraussetzung endlich ist, muß es $m, n \in \mathbb{N}$ geben mit

$$a^{(m)} \;=\; a^{(n)} \quad \text{für} \quad m \neq n$$

(Sonst müßte U unendlich viele Elemente enthalten!)
O.B.d.A. gelte $m < n$. Die Verknüpfung beider Seiten der letzten Gleichung mit $a^{(-m)}$ ergibt wegen $(\star)$

$$(\star\star) \qquad \underline{\underline{e}} \;=\; a^{(0)} \;=\; a^{(n-m)} \underline{\underline{\in U}}\,,$$

da $n - m \in \mathbb{N}$. Bem.: Wegen $U \neq \emptyset$ gibt es mindestens ein Element in U.

UG$_3$) Sei $a \in U$ beliebig. Aus $(\star\star)$ ergibt sich dann

$$a \star a^{(n-m-1)} \;=\; e \;=\; a^{(n-m-1)} \star a\,,$$

wobei $n - m - 1 \geq 0$ gilt. Also nach $(\star)$ bzw. UG$_2$)

$$\underline{\underline{\overline{a}}} \;=\; a^{(n-m-1)} \underline{\underline{\in U}}$$