2. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Musterlösung

5. Aufgabe: a) $(\rho, A) \otimes (\sigma, B) = (\rho \circ \sigma, A \cdot B) = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ -4 & 6 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix})$

b) $\overline{(\sigma, B)} \;=\; (\sigma^{-1}, B^{-1}) \;=\; (\sigma, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix})$

c) $(\rho, A)^{(-3)} \;=\; (\rho^{-3}, A^{-3}) \;=\; (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{4} & 8 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$

d) Neutrales Element bzgl. $\otimes$ ist $(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$

6. Aufgabe: **Annahme:** $(\mathbb{Q}, +)$ ist zyklisch.

Dann existiert ein Element $q \in \mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q} \;=\; \langle q \rangle = \{nq | n \in \mathbb{Z}\}$.

$q \in \mathbb{Q}$ läßt sich darstellen in der Form $q = \dfrac{a}{b}$, mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$. Nach Annahme gibt es zu der rationalen Zahl $\dfrac{1}{2b}$ eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{2b} \;=\; nq \;=\; n \cdot \frac{a}{b} \;=\; \frac{na}{b}$$

Folglich ist $\dfrac{1}{2} \;=\; na \in \mathbb{Z}$ (da $a, n \in \mathbb{Z}$). **Widerspruch!**

Also ist $(\mathbb{Q}, +)$ **nicht** zyklisch.

7. Aufgabe: Gelte $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$. Dann ist $U \cup V = V$ bzw. $U \cup V = U$ jeweils Untergruppe von $(G, \star)$.

Sei umgekehrt $U \cup V$ eine Untergruppe von $(G, \star)$. **Annahme:** $U \not\subseteq V$ **und** $V \not\subseteq U$.

Dann existieren Elemente $a \in U \setminus V$ und $b \in V \setminus U$, die beide in $U \cup V$ liegen.

Da $U \cup V$ Untergruppe ist, folgt $\boxed{a \star b \in U \cup V}$.

1. Fall: $\underline{a \star b \in U} \quad\Longrightarrow\quad \underbrace{\overline{a}}_{\in U} \star \underbrace{(a \star b)}_{\in U} \;=\; (\overline{a} \star a) \star b \;=\; e \star b \;=\; b \in U$ **Wid!**

2. Fall: $\underline{a \star b \in V} \quad\Longrightarrow\quad \underbrace{(a \star b)}_{\in V} \star \underbrace{\overline{b}}_{\in V} \;=\; a \in V$ **Wid!**

Folglich ist die Annahme falsch und die Behauptung richtig.

8. Aufgabe: a) Es ist d_6 die Drehung um $6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$, d.h. $d_6 = \mathrm{id}_E$. Ferner gilt

$$d_k \circ d_l \;=\; d_{k+l} \quad (k, l \in \mathbb{Z}),$$

da die Drehwinkel nur addiert werden. Sei $d_k \in C_6$ beliebig $(k \in \mathbb{Z})$. Division mit Rest liefert $k = 6 \cdot l + r$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < 6$. Damit folgt

$$d_k \;=\; d_{6l+r} \;=\; d_{6l} \circ d_r \;=\; \underbrace{(d_6)^l}_{=id_E} \circ d_r \;=\; d_r$$

woraus sich $C_6 \subseteq \{d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$ ergibt. Da die umgekehrte Inklusion trivialerweise gilt, folgt

$$C_6 \;=\; \{d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$$

Die Drehungen $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ sind paarweise verschieden, also

$$|C_6| \;=\; 6$$

b) Mit $d_k \circ d_l \;=\; d_{k+l}$ und $d_k = d_r$, wobei r der Rest bei Division von k durch 6 ist, ergibt sich folgende Verknüpfungstafel:

$\circ$	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
d_0	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
d_1	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_0
d_2	d_2	d_3	d_4	d_5	d_0	d_1
d_3	d_3	d_4	d_5	d_0	d_1	d_2
d_4	d_4	d_5	d_0	d_1	d_2	d_3
d_5	d_5	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4

c) Die Hintereinanderausführung $\circ$ ist assoziativ. Die übrigen Gruppeneigenschaften lassen sich leicht aus der Verknüpfungstafel ablesen.
Wir bestimmen jetzt zu jedem $d \in C_6$ die von d erzeugte Untergruppe

$$\langle d \rangle \;=\; \{d^n | n \in \mathbb{Z}\}$$

Da die Gruppe endlich ist, müssen sich die Potenzen wiederholen.

$\underline{\langle d_0 \rangle \;=\; \{d_0\}}$

$d_1^0 = d_0$, $d_1^1 = d_1$, $d_1^2 = d_2, d_1^3 = d_3$, $d_1^4 = d_4$, $d_1^5 = d_5$, also $C_6 \subseteq \langle d_1 \rangle \subseteq C_6$ und damit

$\underline{\langle d_1 \rangle \;=\; C_6}$ $\quad (\Longrightarrow \quad (C_6, \circ)$ ist zyklisch$)$

$\underline{\langle d_2 \rangle \;=\; \{d_0, d_2, d_4\}}$

$\underline{\langle d_3 \rangle \;=\; \{d_0, d_3\}}$

$\underline{\langle d_4 \rangle \;=\; \{d_0, d_4, d_2\}}$

$\underline{\langle d_5 \rangle \;=\; \{d_0, d_5, d_4, d_3, d_2, d_1\} = C_6}$

Fazit: $(C_6, \circ)$ ist eine zyklische Gruppe, deren erzeugende Elemente d_1 oder d_5 sind.

d) Triviale Untergruppen von $(C_6, \circ)$ sind

$$\underline{\langle d_0 \rangle \;=\; \{d_0\}} \quad \text{und} \quad \underline{C_6 \;=\; \langle d_1 \rangle \;=\; \langle d_5 \rangle} \,.$$

Ist U eine Untergruppe von $(C_6, \circ)$ mit $d_1 \in U$, so folgt $C_6 = \langle d_1 \rangle \subseteq U \subseteq C_6$, d.h. $U = C_6$. Entsprechend gilt: $d_5 \in U \implies U = C_6$. Fazit:

$$(\star) \quad U \leq (C_6, \circ) \text{ und } U \neq C_6 \quad \Longrightarrow \quad U \subseteq \{d_0, d_2, d_3, d_4\}$$

Insbesondere kann es keine Untergruppe von $(C_6, \circ)$ mit 5 Elementen geben.

Eine Unterguppe $U \leq (C_6, \circ)$ mit 2 Elementen enthält d_0 und ein Element $\neq d_0$, das zu sich selbst invers ist (s. (1.13)). Da d_3 das einzige Element mit dieser Eigenschaft ist, gibt es auch nur die eine Untergruppe mit 2 Elementen, nämlich

$$\underline{\{d_0, d_3\} \;=\; \langle d_3 \rangle}$$

Eine Untergruppe $V \leq (C_6, \circ)$ mit 3 Elementen enthält d_0 und zwei weitere Elemente $d, d' \in C_6$ mit $d \circ d' = d_0$ (s. (1.13)) . Wegen $d_1, d_5 \notin C_6$ ist d_2, d_4 die einzige Möglichkeit, d.h.

$$\underline{\{d_0, d_2, d_4\} \;=\; \langle d_2 \rangle \;=\; \langle d_4 \rangle}$$

ist die einzige Untergruppe mit 3 Elementen.

Für eine Untergruppe W mit 4 Elementen müßte

$$W \;=\; \{d_0, d_2, d_3, d_4\}$$

nach $(\star)$ gelten. W aber ist keine Untergruppe von $(C_6, \circ)$, da W nicht abgschlossen bzgl. $\circ$ ist $(d_2 \circ d_3 = d_5 \notin W)$. Also gibt es keine Untergruppe mit 4 Elementen.

Damit sind alle Untergruppen von $(C_6, \circ)$ bestimmt: Es gibt jeweils genau eine Untergruppe mit 1,2,3 bzw. 6 Elementen, und jede Untergruppe ist zyklisch.