13. Übungsblatt

Musterlösungen

54. Aufgabe: (Idee. Diese Aufgabe wurde ausführlich in den Übungen besprochen.)

Seien $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ und $S := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$. Dann ist S der Kern des surjektiven Gruppenhomomorphismus $\det{:}G \longrightarrow \mathbb{Z}_3^\star$. Aus $G/S \cong \mathbb{Z}_3^\star$ folgt

$$|S| \;=\; \frac{1}{2} \cdot |G|$$

Zur Bestimmung von $|G|$ geht man wie in Aufgabe 53 vor: Man zählt die Anzahl der Möglichkeiten, linear unabhängige 2–Tupel aus $\mathbb{Z}_3^2$ zu bilden. Das Ergebnis ist $|G| = 48$, also

$$|S| \;=\; \frac{1}{2} \cdot 48 \;=\; 24\,.$$

Aufgabe 55 a) In einer abelschen Gruppe ist jede Untergruppe ein Normalteiler. Ist also G abelsch, so gilt: G einfach $\iff$ G hat keine Untergruppen $\neq \{1\}$ und $\neq G$ $\iff$ $|G| = p \in \mathbb{P}$ (s. Aufgabe 37) .

b) (Idee. Dieser Aufgabenteil ist ausführlich in den Übungsgruppen besprochen worden.)
Annahme: G ist eine einfache Gruppe der Ordnung 12. Dann muß G drei 2–Sylowuntergruppen der Ordnung 4 und vier 3–Sylowuntergruppen der Ordnung 3 besitzen. Damit enthält G $4{\cdot}2 = 8$ Elemente der Ornung 3 . Sind die 3 2–Sylowgruppen alle zyklisch, so enthält G 6 Elemente der Ordnung 4, sind dagegen die 2–Sylowuntergruppen Klein'sche Vierergruppen, so enthält G mindestens 5 Elemente der Ordnung 2 . Damit wird aber die Elementzahl von G in beiden Fällen größer als 12 , was ein **Widerspruch** ist.

c) Sei $|G| = 2p$. Im Falle $\underline{p = 2}$ ist $G \cong \mathbb{Z}_4$ oder $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nicht einfach.

Sei nun $\underline{p \geq 3}$. Dann besitzt G eine p–Sylowuntergruppe U der Ordnung p, die damit vom Index 2 ist. Folglich ist U ein Normalteiler mit $\{1\} \neq U < G$, so daß G nicht einfach ist.

d) $K := \mathrm{Kern}(f)$ ist Normalteiler von G. Ist also G einfach, so folgt entweder $K = \{1\}$ ($\Longrightarrow$ f injektiv) oder $K = G$ ($\Longrightarrow$ f trivial) .

e) Klar ist, daß $f(N)$ Untergruppe von H ist.
Noch z.z.: $\forall\, y \in f(N)\ \forall\, b \in H\ :\ byb^{-1} \in f(N)$.
Da f surjektiv ist, existiert ein $a \in G$ mit $b = f(a)$. Außerdem ist y von der Form $y = f(x)$ mit $x \in N$. Es folgt

$$byb^{-1} = f(a)f(x)f(a)^{-1} = f(a)f(x)f(a^{-1}) = f(axa^{-1}) \in f(N)$$

Dabei gilt $axa^{-1} \in N$, da N Normalteiler ist.

f) Da sich die Einfachheit einer Gruppe bei Isomorphie überträgt, genügt es zu zeigen, daß $H \times K$ nicht einfach ist.

Nach Aufgabe 41b) ist $H \times \{1_K\}$ ein Normalteiler in $H \times K$. Da H mindestens zwei Elemente enthält, ist $H \times \{1_K\} \neq \{(1_H, 1_K)\}$, und da K mindestens zwei Elemente enthält, ist $H \times \{1_K\} \neq H \times K$.

56. Aufgabe: Zeige: $\mathrm{ord}(A) = n$, $\mathrm{ord}(B) = 2$ und $AB = BA^{-1}$. Nach (11.2) folgt dann die Behauptung .

57. Aufgabe: Es gilt $\Delta_n \cong D_n$, wobei D_n die Symmetriegruppe des regelmäßigen n–Ecks ist . Es ist anschaulicher, mit D_n zu arbeiten!

a) D_{31} enthält 31 Spiegelungen, die die Ordnung 2 haben. Die 31 Drehungen bilden eine Untergruppe der Ordnung 31, die zyklisch ist und die von jedem Element $\neq$ id erzeugt wird. Also gibt es 30 Elemente der Ordnung 31 und die Identität, die die Ordnung 1 hat. Folglich

Ordnung	1	2	31	62
Anzahl	1	31	30	–

b) Teiler von $|D_{31}| = 62$ sind 1,2,31,62 . Es gibt also genau 1 Untergruppe der Ordnung 1, 31 Untergruppen der Ordnung 2 ($2 \in \mathbb{P}$ und es gibt genau 31 Elemente der Ordnung 2), 1 Untergruppe der Ordnung 31 (da $31 \in \mathbb{P}$ und eine Gruppe der Ordnung 31 von jedem Element der Ordnung 31 erzeugt wird). Schließlich gibt es die Untergruppe D_{31} .

c) Es gilt $|G| = 62 = 2 \cdot 31$ mit $2, 31 \in \mathbb{P}$. Also git es 2–Sylowuntergruppen der Ordnung 2 (nach b) sind das 31 Stück) und genau eine 31–Sylowuntergruppe der Ordnung 31 , die Normalteiler sein muß . Zur Kontrolle:

$s_2 \in \{1, 2, 31, 62\}$, $s_2 \equiv 1 \pmod 2 \quad \Longrightarrow \quad s_2 \in \{1, 31\}$

$s_{31} \in \{1, 2, 31, 62\}$, $s_{31} \equiv 1 \pmod{31} \quad \Longrightarrow \quad s_{31} = 1$.

d) $\{1\}$ und G sind immer Normalteiler in G . Nach c) ist die einzige Untergruppe der Ordnung 31 Normalteiler in G . Ein Normalteiler der Ordnung 2 wäre eine 2–Sylowuntergruppe, also einzige 2–Sylowuntergruppe im Widerspruch dazu, daß es 31 Untergruppen der Ordnung 2 gibt.

e) $Z(G)$ ist Normalteiler in G mit $|Z(G)| \in \{1, 2, 31, 62\}$.

Es ist $|Z(G)| \neq 62$, da sonst G abelsch wäre.

Wäre $|Z(G)| = 31$, so wäre die Faktorgruppe $G/Z(G)$ wegen $|G/Z(G)| = \frac{62}{31} = 2$ zyklisch, G also abelsch nach Aufgabe 51 .

Einen Normalteiler der Ordnung 2 kann es in G nach d) nicht geben.

Folglich $\underline{Z(G) = \{1\}}$.

g) Die obigen Aussagen gelten entsprechend in den Gruppen Δ_p , wobei $p \geq 3$ eine Primzahl ist.

***58. Aufgabe:** (Idee) Es genügt zu zeigen: Ist die Gruppe $H \times K$ endlich, p–primär und zyklisch, so folgt $|H| = 1$ oder $|K| = 1$ (wieso?). Nach Aufgabe 50c) sind auch H und K p–primär, und beide Gruppen sind zyklisch und endlich (wieso?).

Gelte $|H| = p^m$ und $|K| = p^n$ mit $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Annahme: $m \geq 1$ und $n \geq 1$.

$U := H \times \{1_K\}$ und $V := \{1_H\} \times K$ sind Untergruppen von $H \times K$ (sogar Normalteiler nach Aufgabe 41) mit $|U| = |H| = p^m$ und $|V| = |K| = p^n$. Außerdem gilt

$$U \cap V \;=\; \{1\}$$

In der endlichen zyklischen Gruppe $H \times K$ sind die Untergruppen U und V wieder zyklisch, und es gilt (wieso?):

$$U \subseteq V \quad \Longleftrightarrow \quad |U| \text{ teilt } |V|\,.$$

Gelte o.B.d.A. $m \leq n$. Dann folgt $p^m | p^n$ und daraus $U \subseteq V$, also

$$\{1\} \neq U \;=\; U \cap V \;=\; \{1\}$$

Widerspruch! Also gilt $m = 0$ oder $n = 0$, folglich $|H| = p^0 = 1$ oder $|K| = p^0 = 1$.