12. Übungsblatt

Musterlösungen zu den Aufgaben 50 und 53

50. Aufgabe: a) Hat jedes Element aus G p–Potenzordnung, so gilt dies insbesondere für alle Elemente der Untergruppe $U \subseteq G$.

b) Sei $b \in H$ beliebig. Da f surjektiv ist, existiert ein $a \in G$ mit $b = f(a)$. Nach Voraussetzung gilt $\operatorname{ord}(a) = p^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ und damit $a^{p^k} = 1_G$. Es folgt

$$1_H = f(1_G) = f(a^{p^k}) = f(a)^{p^k} = b^{p^k} .$$

Nach (4.20d) ist $\operatorname{ord}(b)$ ein Teiler von p^k und damit selbst eine Potenz von p.

c) “$\Longrightarrow$”

Sei $H \times K$ p-primär. Da die Projektionen $p_H : H \times K \longrightarrow H$, $p_K : H \times K \longrightarrow K$ surjektive Gruppenhomomorphismen sind, folgt die Behauptung mit b).

“$\Longleftarrow$”

Sei $(a, b) \in H \times K$ ein beliebiges Element. Dann sind $a \in H$ und $b \in K$. Da H und K beide p–primär sind, gibt es $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\operatorname{ord}(a) = p^m \ , \ \operatorname{ord}(b) = p^n .$$

Nach (5.11) ist

$$\operatorname{ord}((a,b)) \ = \ \operatorname{kgV}(\operatorname{ord}(a), \operatorname{ord}(b)) \ = \ \operatorname{kgV}(p^m, p^n) \ = \ p^{\max(m,n)}$$

eine p–Potenz, so daß die Gruppe $H \times K$ auch p–primär ist.

***53. Aufgabe:** U ist eine Untergruppe von $(G, \cdot)$:

Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$. Dann folgt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & x + x' & y + xz' + y' \\ 0 & 1 & z + z' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xz - y \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U .$$

Außerdem gilt für die Einheitsmatrix $E \in U$.

Damit gilt $\underline{\underline{U \leq G}}$.

Die Elemente x, y und z einer Matrix $A \in U$ können unabhängig voneinander die p Elemente von $\mathbb{Z}_p$ durchlaufen, so daß folgt

$$\underline{\underline{|\,U\,|}} \ = \ p \cdot p \cdot p \ = \ \underline{\underline{p^3}}$$

Wir bestimmen nun die Ordnung von $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_p)$. Eine (3×3)–Matrix A über $\mathbb{Z}_p$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre drei Spalten $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}_p^3$ linear unabhängig über $\mathbb{Z}_p$ sind. Als erste Spalte von A können wir daher jede Spalte $\neq 0$ aus $\mathbb{Z}_p^3$ wählen, d.h. für s_1 gibt es

$$|\,\mathbb{Z}_p^3 \setminus \{0\}\,| \;=\; p^3 - 1$$

Möglichkeiten. Die zweite Spalte $s_2 \in \mathbb{Z}_p^3$ muß jetzt so gewählt werden, daß $\{s_1, s_2\}$ linear unabhängig ist, d.h. s_2 darf kein skalares Vielfaches von s_1 sein: $s_2 \in \mathbb{Z}_p^3 \setminus \mathbb{Z}_p s_1$. Für s_2 gibt es also

$$|\,\mathbb{Z}_p^3 \setminus \mathbb{Z}_p s_1\,| \;=\; p^3 - p$$

Möglichkeiten. Wenn $\{s_1, s_2\}$ linear unabhängig ist, so ist $\{s_1, s_2, s_3\}$ genau dann linear unabhängig, wenn s_3 nicht in der linearen Hülle L von s_1 und s_2 liegt. L ist ein 2–dimensionaler $\mathbb{Z}_p$–Vektorraum, also isomorph zu $\mathbb{Z}_p^2$. Daher gilt $|L| = p^2$, und die Anzahl der Möglichkeiten für s_3 ist

$$|\,\mathbb{Z}_p^3 \setminus L\,| \;=\; p^3 - p^2 \,.$$

Daher gibt es genau $(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)$ Möglichkeiten, 3 linear unabhängige Spalten aus $\mathbb{Z}_p^3$ auszuwählen, d.h.

$$\underline{\underline{|\,G\,| \;=\; (p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}}\,.$$

Nun gilt

$$(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2) \;=\; (p^3-1)p(p^2-1)p^2(p-1) \;=\; p^3 \cdot a\,,$$

wobei p die Zahl $a := (p^3-1)(p^2-1)(p-1)$ nicht teilen kann (sonst müßte p eine der Zahlen p^3-1 , p^2-1 oder $p-1$ teilen und damit auch 1) . Folglich ist p^3 die höchste p–Potenz, die die Ordnung von G teilt, so daß jede Untergruppe von G, die die Ordnung p^3 hat, eine p–Sylowuntergruppe von G ist. Insbesondere ist also U eine p–Sylowuntergruppe von G .