1. Übungsblatt

GRUNDZÜGE DER ALGEBRA (WS 2005/06)

Musterlösung für Aufgabe 4

4. Aufgabe: Nach Definition (1.3) ist zu zeigen:

$$\begin{array}{ll} \textbf{1)} & \forall\, a \in G \,:\, a \star e = a \\ \textbf{2)} & b \star a = e \implies a \star b = e \end{array}$$

Zu 2)

Sei $a \in G$ beliebig. Dann existiert nach Voraussetzung ii) ein $b \in G$ mit $\underline{b \star a = e}$. Verknüpft man beide Seiten dieser Gleichung mit b von rechts, so ergibt sich

$$(b \star a) \star b \;=\; e \star b \;\stackrel{i)}{=}\; b\,.$$

Da $\star$ assoziativ ist, folgt

$$\textbf{iii)} \qquad b \star (a \star b) \;=\; b\,.$$

Zu $b \in G$ gibt es nach ii) ein $c \in G$ mit $\underline{c \star b = e}$. Unter Berücksichtigung der Assoziativität von $\star$ ergibt sich

$$\underline{\underline{e}} \;=\; c \star b \;\stackrel{iii)}{=}\; c \star (b \star (a \star b)) \;=\; (c \star b) \star (a \star b) \;=\; e \star (a \star b) \;\stackrel{i)}{=}\; \underline{\underline{a \star b}}\,.$$

Zu 1)

Sei $a \in G$ beliebig. Nach 2) existiert ein $b \in G$ mit

$$a \star b \;=\; e \;=\; b \star a\,.$$

Es folgt

$$\underline{\underline{a \star e}} \;=\; a \star (b \star a) \;=\; (a \star b) \star a \;=\; e \star a \;\stackrel{i)}{=}\; \underline{\underline{a}}\,.$$

Bemerkung: Eine Gruppe $(G, \star)$ ist nach Def. (1.3) eine Menge G mit einer assoziativen Verknüpfung $\star$, so daß gilt:

a) Es gibt in G ein bzgl. $\star$ neutrales Element,

b) Jedes Element aus G ist invertierbar bzgl. $\star$.

Aufgabe 4. zeigt nun, daß eine Menge G mit einer assoziativen Verknüpfung $\star$ genau dann eine Gruppe ist, wenn die folgenden abgeschwächten Bedingungen erfüllt sind:

a) Es gibt in G ein bzgl. $\star$ **links**neutrales Element,

b) Jedes Element aus G ist **links**invertierbar bzgl. $\star$.