Zum Beweis von (23.19) müssen wir zuerst noch einige Hilfsmittel bereitstellen.

(23.20) HILFSSATZ: Seien $M, N \in \mathrm{M}_n(K)$ <u>ähnliche</u> Matrizen. Dann gilt für jedes Polynom $p \in K[T]$:

a) $p(M) \approx p(N)$

b) $p(M) = O \iff p(N) = O$.

Bew: Es gibt $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $M = P \cdot N \cdot P^{-1}$.

a) Sei $p = \sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i T^i$. Dann gilt

$$p(M) = p(PNP^{-1}) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (PNP^{-1})^i = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i P N^i P^{-1} = P \cdot \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i N^i \right) \cdot P^{-1} = P \cdot p(N) \cdot P^{-1}$$

Also $p(M) \approx p(N)$.

b) Aus $O = p(M) \approx p(N)$ folgt $p(N) = O$ und umgekehrt.

(23.21) FOLG: Ähnliche Matrizen haben dasselbe Minimalpolynom.

Bew: Gelte $M \approx N$. Das Minimalpolynom q_M von M ist das normierte Polynom kleinsten Grades, das M annulliert. Mit (23.20b) gilt $q_M(M) = O \implies q_M(N) = O$, so daß $q_N \mid q_M$ nach (23.16b) gilt. Entsprechend folgt $q_M \mid q_N$ aus $q_N(M) = q_N(N) = O$. Da die Polynome sich gegenseitig teilen und normiert sind, folgt $q_M = q_N$.

(23.22) HILFSSATZ: Sei $M \in \mathrm{M}_n(K)$ eine trigonalisierbare Matrix mit dem charakteristischen Polynom $p_M = \prod\limits_{i=1}^{s} (\lambda_i - T)^{n_i}$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von M sind. Dann gilt

$$M \;\approx\; \mathrm{Diag}(\tilde{J}_1, \ldots, \tilde{J}_s)$$

mit $\tilde{J}_i = \lambda_i E_{n_i} + N_i \ \ (i = 1, \ldots, s)$, wobei $N_i \in \mathrm{M}_{n_i}(K)$ eine strikt obere Dreiecksmatrix (und damit nilpotent) ist.

Bew: Fassen wir in der Jordan–Normalform von M alle Jordan–Blöcke zusammen, die zu demselben Eigenwert λ_i gehören, so erhalten wir eine obere Dreiecksmatrix $\tilde{J}_i$ vom Format $n_i \times n_i$, bei der der Eigenwert λ_i in der Hauptdiagonale seht. Wir können dann $\tilde{J}_i$ in der Form $\tilde{J}_i = \lambda_i E_{n_i} + N_i \ \ (i = 1, \ldots, s)$ darstellen, wobei $N_i \in \mathrm{M}_{n_i}(K)$ eine strikt obere Dreiecksmatrix ist. Da die Ähnlichkeitsbeziehung beim Umordnen der Blöcke der Hauptdiagonale erhalten bleibt, wie die folgende Übungsaufgabe zeigt, ist die Behauptung damit bewiesen.

Aufgabe: Seien $M \in \mathrm{M}_m(K)$, $N \in \mathrm{M}_n(K)$ und $D := \mathrm{Diag}(M, N) \in \mathrm{M}_{m+n}(K)$. Ferner sei V die Blockmatrix

$$V := \; = \begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+n}(K)$$

Beweise: $VDV^{-1} = \mathrm{Diag}(N, M)$, d.h. $\mathrm{Diag}(M, N) \approx \mathrm{Diag}(N, M)$.

Wie läßt sich dieses Ergebnis auf eine Blockdiagonalmatrix aus $s \geq 2$ quadratischen Matrizen verallgemeinern?

(23.23) HILFSSATZ: Seien $M \in \mathrm{M}_n(K)$ und $p \in K[T]$. Dann gilt:

a) Ist M eine (strikt) obere Dreiecksmatrix, so ist auch $p(M)$ eine (strikt) obere Dreiecksmatrix.

b) M trigonalisierbar $\Longrightarrow$ $p(M)$ trigonalisierbar.

c) Ist M eine Diagonalmatrix, so ist auch $p(M)$ eine Diagonalmatrix.

d) M diagonalisierbar $\Longrightarrow$ $p(M)$ diagonalisierbar.

Bew: a) , **c)** Sei $p = \sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i T^i$. Dann ist $p(M) = \sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i M^i$ als Linearkombination von (strikt) oberen Dreiecksmatrizen (bzw. Diagonalmatrizen) selbst eine (strikt) obere Dreiecksmatrix (bzw. Diagonalmatrix) .

b) , **d)** Gilt $M \approx D$ wobei D eine obere Dreiecksmatrix bzw. eine Diagonalmatrix ist, so folgt $p(M) \approx p(D)$ nach (23.20a), woraus nach a) bzw. c) die Behauptung folgt.

(23.24) HILFSSATZ: Sei $M \in \mathrm{M}_n(K)$ eine trigonalisierbare Matrix mit dem charakteristischen Polynom $p_M = \prod\limits_{i=1}^{s} (\lambda_i - T)^{n_i}$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von M sind. Ferner sei $h := \prod\limits_{i=1}^{s} (T - \lambda_i) \in K[T]$.

Dann ist $h(M)$ eine nilpotente Matrix.

Bew: Nach (23.22) gilt $M \approx \mathrm{Diag}(\tilde{J}_1, \dots, \tilde{J}_s) =: D$ mit $\tilde{J}_i = \lambda_i E_{n_i} + N_i \quad (i = 1, \dots, s)$, wobei $N_i \in \mathrm{M}_{n_i}(K)$ eine strikt obere Dreiecksmatrix (und damit nilpotent) ist. Insbesondere ist D eine obere Dreiecksmatrix. Es folgt

$$h(M) \approx h(D) = \mathrm{Diag}(h(\tilde{J}_1), \dots, h(\tilde{J}_s)) =: \tilde{D}$$

$\tilde{J}_k$ ist eine obere Dreiecksmatrix mit λ_k als Eigenwert. Dann ist $h(\lambda_k)$ Eigenwert der oberen Dreiecksmatrix $h(\tilde{J}_k)$ (s. Aufgabe 54) , d.h.

$$h(\tilde{J}_k) \; = \; h(\lambda_k)E + N'_k \quad (N'_k \text{ strikt obere Dreiecksmatrix}$$

Wegen $h(\lambda_k) = 0$ ist also $h(\tilde{J}_k)$ eine strikt obere Dreiecksmatrix. Damit ist dann aber $\tilde{D}$ als Blockdiagonalmatrix aus strikt oberen Dreiecksmatrizen selbst eine strikt obere Dreiecksmatrix und damit nilpotent. Jede zu einer nilpotenten Matrix ähnlche Matrix ist aber selbst wieder nilpotent, womit dann auch $h(M)$ nilpotent ist.

Wir kommen nun zu dem **Beweis von (23.19)**:

a) $\Longrightarrow$ b)

M sei diagonalisierbar, $p_M = \prod_{i=1}^{s}(\lambda_i - T)^{n_i}$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von M sind. Ferner sei $h := \prod_{i=1}^{s}(T - \lambda_i) \in K[T]$

$h(M)$ ist nach (23.23) diagonalisierbar und nach (23.24) nilpotent. Nun ist aber jede Matrix, die zugleich diagonalisierbar und nilpotent ist, die Nullmatrix. Aus $h(M) = O$ folgt nach (23.16b)

$$q_M \mid h$$

Nach (23.18b) gilt auch umgekehrt

$$h \mid q_M$$

Da h und q_M normierte Polynome sind, folgt hieraus

$$q_M \;=\; h\,,$$

so daß q_M nur einfache Nullstellen hat.

b) $\Longrightarrow$ a)

Nach (23.18) ist $q_M = \prod_{i=1}^{s}(T - \lambda_i)$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von M sind. Nach (23.22) gilt

$$M \;\approx\; \mathrm{Diag}(\tilde{J}_1, \ldots, \tilde{J}_s)$$

mit $\tilde{J}_i = \lambda_i E_{n_i} + N_i \;\; (i = 1, \ldots, s)$, wobei $N_i \in \mathrm{M}_{n_i}(K)$ eine strikt obere Dreiecksmatrix (und damit nilpotent) ist. Daraus ergibt sich mit (23.20) und (23.13g)

$$O = q_M(M) \approx \mathrm{Diag}(q_M(\tilde{J}_1), \ldots, q_M(\tilde{J}_s))$$

Damit ist $q_M(\tilde{J}_k) = O$ für alle $k = 1, \ldots, s$, und es folgt

$$O = q_M(\tilde{J}_k) = (\tilde{J}_k - \lambda_1 E) \cdot \ldots \cdot (\underbrace{\tilde{J}_k - \lambda_k E}_{=N_k}) \cdot \ldots \cdot (\tilde{J}_k - \lambda_s E) = \underbrace{\left(\prod_{i \neq k}(\tilde{J}_k - \lambda_i E)\right)}_{=:P} \cdot N_k$$

Für $i \neq k$ und damit $\lambda_i \neq \lambda_k$ ist die Matrix

$$\tilde{J}_k - \lambda_i E = \lambda_k E + N_k - \lambda_i E = (\lambda_k - \lambda_i)E + N_k = \begin{pmatrix} \lambda_k - \lambda_i & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k - \lambda_i \end{pmatrix}$$

invertierbar (ihre Determinante ist $\neq 0$), folglich ist auch P als Produkt invertierbarer Matrizen invertierbar. Aus $P \cdot N_k = O$ folgt daher $N_k = O$ für alle $k = 1, \ldots, s$. Damit ist

$$\tilde{J}_k \;=\; \lambda_k E$$

für alle k eine Diagonalmatrix, und dasselbe gilt dann auch für $\mathrm{Diag}(\tilde{J}_1, \ldots, \tilde{J}_s)$. Infolgedessen ist M zu einer Diagonalmatrix ähnlich, also diagonalisierbar.