§23. Die Jordan'sche Normalform

Wir suchen für einen trigonalisierbaren Endomorphismus unter seinen dreiecksförmigen Darstellungsmatrizen eine Darstellungsmatrix, die in einem gewissen Sinne eindeutig bestimmt ist. Dies ist die sog. Jordan'sche Normalform dieses Endomorphismus, die sich auch durch eine besonders einfache Bauart auszeichnet.

V sei ein K–Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Ist dann $U \subseteq V$ ein f–invarianter Unterraum von V, so gilt $f(U) \subseteq U$, so daß f durch Einschränkung auf U eine K–lineare Abbildung $f|U : U \longrightarrow U \;\;,\;\; u \longmapsto f(u) \in U$ definiert.

(23.1) SATZ: V sei ein n–dimensionaler K–Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. $U_1, \ldots, U_s$ seien f–invariante Untervektorräume von V mit $\dim_K(U_i) = n_i$ und Basen $B_i \subseteq U_i \;\; (i = 1, \ldots, s)$. Ist dann V die direkte Summe der Untervektorräume U_i, so ist $B := \bigcup\limits_{i=1}^{s} B_i$ eine Basis von V, bzgl. der f die Darstellungsmatrix

$$\mathrm{M}_B^B(f) \;=\; \begin{pmatrix} M_1 & & & O \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & M_s \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{M}_n(K)$$

hat. Dabei gilt:

a) $M_i \;=\; \mathrm{M}_{B_i}^{B_i}(f|U_i) \in \mathrm{M}_{n_i}(K) \qquad$ für alle $i = 1, \ldots, s$

b) $p_f \;=\; \prod\limits_{i=1}^{s} p_{f|U_i}$

BEM: $\mathrm{M}_B^B(f)$ ist in dem obigen Satz eine sog. **Blockdiagonalmatrix**, die wir auch mit $\mathrm{Diag}(M_1, M_2, \ldots, M_s)$ bezeichnen werden.

Strategie: Zerlege V in eine direkte Summe von f–invarianten Untervektorräumen U_i, die sich selbst nicht weiter zerlegen lassen. Dann hat $f|U_i$ bzgl. einer geeigneten Basis als Darstellungsmatrix eine besonders einfach gebaute Matrix, eine sog. Jordan-Matrix.

(23.2) DEF: V sei ein K–Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. V heißt **unzerlegbar bzgl. f**, wenn gilt:

i) $V \neq 0 \qquad$ **ii)** V ist **nicht** direkte Summe zweier f–invarianter Unterräume $\neq 0$ von V.

BEM: ii) bedeutet: Ist $V = U_1 \oplus U_2$, wobei U_1 und U_2 f–invariante Unterräume sind, so folgt $U_1 = 0$ oder $U_2 = 0$.

Beispiele: **a)** Im Falle $\dim_K(V) = 1$ ist V unzerlegbar bzgl. f .

b) Ein weiteres Beispiel für einen unzerlegbaren Vektorraum findet man in Aufg. 66 .

(23.3) SATZ: V sei ein n–dimensionaler K–Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann gibt es f–invariante Untervektorräume $U_1, \ldots, U_s$ von V, so daß gilt:

a) $V \;=\; \bigoplus_{i=1}^{s} U_i$

b) U_i ist unzerlegbar bzgl. $f|U_i$ für alle $i = 1, \ldots, s$.

(23.4) HILFSSATZ: Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann gilt:

a) $O \subseteq \mathrm{Kern}(f) \subseteq \mathrm{Kern}(f^2) \subseteq \mathrm{Kern}(f^3) \subseteq \ldots \subseteq V$ (Kernfolge)

$V \supseteq \mathrm{Bild}(f) \supseteq \mathrm{Bild}(f^2) \supseteq \mathrm{Bild}(f^3) \supseteq \ldots \supseteq O$ (Bildfolge)

b) Ist V endlichdimensional, so gibt es $r, s \in \mathbb{N}$ mit

$\mathrm{Kern}(f^k) = \mathrm{Kern}(f^r)$ $(\forall\, k \geq r)$ und $\mathrm{Bild}(f^l) = \mathrm{Bild}(f^s)$ $(\forall\, l \geq s)$

(23.5) LEMMA: V sei ein endlichdimensionaler K–Vektorraum, und f sei ein K–Endomorphismus von V. Es gelte $f^n = o$ für ein $n \geq 1$, und W sei ein direktes Komplement von $\mathrm{Kern}(f^{n-1})$ in V (d.h. $V = \mathrm{Kern}(f^{n-1}) \oplus W$) . Dann gilt:

a) Die Einschränkungen

$$W \xrightarrow{f} f(W) \xrightarrow{f} f^2(W) \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{f} f^{n-1}(W)$$

sind alle Isomorphismen.

b) Die Summe $S_W := W + f(W) + f^2(W) + \ldots + f^{n-1}(W)$ ist direkt, und S_W ist ein f–invarianter Untervektorraum von V .

c) S_W besitzt ein f–invariantes Komplement in V .

(23.6) SATZ: Sei V ein K–Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Ist dann V unzerlegbar bzgl. f und gilt $f^n = o$ und $f^{n-1} \neq o$, so folgt:

a) $\dim_K(V) = n$

b) Es gibt eine Basis B von V mit

$$\mathrm{M}_B^B(f) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} =: J_n \in \mathrm{M}_n(K)$$

(23.7) FOLG: Sei $\dim_K(V) = n$, $f \in \mathrm{End}_K(V)$, V sei unzerlegbar bzgl. f. Ist dann f nilpotent, so gilt $f^n = o$ und $f^{n-1} \neq o$.

(23.8) Fitting–Lemma

V sei ein endlichdimensionaler K–Vektorraum, und f sei ein K–Endomorphismus von V. Ist dann V unzerlegbar bzgl. f, so ist jeder Endomorphismus $g \in \mathrm{End}_K(V)$, für den $f \circ g = g \circ f$ gilt, entweder bijektiv oder nilpotent. Insbesondere ist f selbst entweder bijektiv oder nilpotent.

(23.9) SATZ: V sei ein n–dimensionaler K–Vektorraum. Der K–Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ besitze einen Eigenwert $\lambda \in K$. Ist dann V unzerlegbar bzgl. f, so gibt es eine Basis B von V mit

$$\mathrm{M}_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix} = J_n(\lambda) \in \mathrm{M}_n(K) \ .$$

$J_n(\lambda)$ heißt $(n \times n)$–**Jordan-Matrix** (oder **Jordan–Block**) zum Eigenwert λ von f.

(23.10) SATZ: Jordan'sche Normalform (ca. 1870)

V sei ein n–dimensionaler K–Vektorraum. $f \in \mathrm{End}_K(V)$ sei trigonalisierbar. Dann gibt es eine Basis B von V, Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_s \in \mathbb{N}$ $(1 \le s \le n)$ und Elemente $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in K$, so daß gilt:

$$\mathrm{M}_B^B(f) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

Diese Matrix heißt die **Jordan'sche Normalform (JNF)** von f.

(23.11) BEM: a) In der Hauptdiagonale der JNF von f stehen die Eigenwerte von f. $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ müssen nicht paarweise verschieden sein. Es ist $s \ge$ Anzahl der paarweise verschiedenen Eigenwerte von f.

b) Die JNF ist eindeutig bestimmt bis auf die Reihenfolge der Jordan–Blöcke.

c) Eine Diagonalmatrix ist eine JNF, bei der alle Jordan–Blöcke das Format (1×1) haben.

(23.12) FOLG: a) Jeder $\mathbb{C}$ Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ $(\dim_{\mathbb{C}}(V) < \infty)$ besitzt eine JNF als Darstellungsmatrix bzgl. einer geeigneten Basis.

b) Jede Matrix $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ist ähnlich zu einer JNF.