§ 21. Trigonalisierbare Endomorphismen und Matrizen

Wir wollen untersuchen, wann es für einen Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ eine Basis B von V gibt, so daß $\mathrm{M}_B^B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

(21.1) DEF: a) Sei V ein endlichdimensionaler K–Vektorraum. Ein K–Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ heißt **trigonalisierbar**, wenn es eine Basis B von V gibt, so daß die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_B^B(f)$ eine eine obere Dreiecksmatrix ist.

b) Eine Matrix $M \in \mathrm{M}_n(K)$ heißt **trigonalisierbar**, wenn M zu einer oberen Dreiecksmatrix ähnlich ist.

(21.2) DEF: V sei ein n–dimensionaler K–Vektorraum.

a) Eine Folge $(U_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ von Unterktorräumen U_i von V heißt eine **Fahne von** V, wenn gilt:

i) $\dim_K(U_i) = i$ für alle $i = 0, 1, \ldots, n$

ii) $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_{n-1} \subset U_n = V$

b) Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

Ein Untervektorraum $U \subseteq V$ heißt f**–invariant**, wenn gilt: $f(U) \subseteq U$.

Eine Fahne $(U_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ von V heißt f**–invariant**, wenn jeder Untervektorraum U_i f–invariant ist.

(21.3) SATZ: Sei V ein endlichdimensionaler K–Vektorraum. Für einen K–Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) f ist trigonalisierbar

b) Es existiert eine f–invariante Fahne von V.

(21.4) BEM: a) $M \in \mathrm{M}_n(K)$ trigonalisierbar $\iff$ $f_M : K^n \longrightarrow K^n$ trigonalisierbar.

b) Das charakteristische Polynom einer oberen Dreiecksmatrix $M = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ ist $p_M = \prod\limits_{i=1}^{n}(a_{ii} - T)$. Damit zerfällt p_M in Linearfaktoren, und die Haupdiagonalelemente a_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$ sind gerade die Eigenwerte von M. Ist die Matrix M ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix, so zerfällt p_M ebenfalls in Linearfaktoren (20.17b), da ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom haben..

(21.5) SATZ: a) Sei V ein endlichdimensionaler K–Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ ein K–Endomorphismus. Dann gilt: f ist trigonalisierbar $\iff$ das charakteristische Polynom p_f von f zerfällt in $K[T]$ in Linearfaktoren.

b) Für eine Matrix $M \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt: M ist trigonalisierbar $\iff$ das charakteristische Polynom p_M von M zerfällt in $K[T]$ in Linearfaktoren.

<u>Bew:</u> a) Der Beweis läßt sich auf b) zurückführen.

b) "$\Longrightarrow$" Gilt nach (21.4b)

"$\Longleftarrow$" Wir führen vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

$\underline{\boldsymbol{n=1}}$ $M \in \mathrm{M}_1(K)$ ist schon eine obere Dreiecksmatrix.

$\underline{\boldsymbol{n=2}}$ Sei $M \in \mathrm{M}_2(K)$. Da p_M in Linearfaktoren zerfällt, gibt es einen Eigenwert $\lambda_1 \in K$ von M. Sei v_1 ein Eigenvektor von M zum Eigenwert λ_1.Ergänze $\{v_1\}$ zu einer Basis $\{v_1, v_2\}$ von K^2. Sei $P := (v_1\ v_2) \in \mathrm{M}_2(K)$ die Matrix mit den Spalten v_1, v_2. Dann folgt $P \in \mathrm{GL}_2(K)$ und $P^{-1} \cdot M \cdot P \ = \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}$, d.h. M ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix. Damit ist M trigonalisierbar.

<u>(IV)</u> Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$ beliebig aber fest, und es sei jede Matrix aus $\mathrm{M}_{n-1}(K)$, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, trigonalisierbar.

<u>(IS)</u> Sei $M \in \mathrm{M}_n(K)$ eine beliebige Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Zu zeigen ist, daß M zu einer oberen Dreiecksmatrix ähnlich ist.

Nach Voraussetzung über p_M existiert mindestens ein Eigenwert $\lambda_1 \in K$ von M. Sei $v_1 \in K^n$ ein zugehöriger Eigenvektor. Ergänze $\{v_1\}$ zu einer Basis $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ von K^n (dies kann auf ganz unterschiedliche Weise geschehen!). Sei P die Matrix mit den Spalten $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Dann gilt $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ und

$$P^{-1} \cdot M \cdot P \ = \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix $N \in \mathrm{M}_{n-1}(K)$. Wegen $p_M = (\lambda_1 - T) \cdot p_N$ zerfällt auch p_N in Linearfaktoren, so daß es nach (IV) eine Matrix $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$ gibt, für die

$$Q^{-1} \cdot N \cdot Q \ = \ \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix ist. Setze

$$R \ := \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

Wegen $\det(R) = \det(Q) \neq 0$ ist R invertierbar, und es gilt

$$R^{-1} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

Man rechnet nun nach, daß :

$$R^{-1}P^{-1}MPR \;=\; R^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix} R \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1}NQ & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix ist. Mit $S := P \cdot R \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist dann $S^{-1}MS$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h. die Matrix M ist trigonalisierbar.

(21.6) FOLG: a) Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$–Vektorraum, so ist jeder $\mathbb{C}$–Endomorphismus f von V trigonalisierbar.

b) Jede Matrix aus $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix.

Bew: Nach dem Fundamentalsatz (D.6) zerfällt jedes nichtkonstante Polynom aus $\mathbb{C}[T]$ in Linearfaktoren.

(21.7) BEISPIEL: Wir wollen die Überlegungen, die zum Beweis von (21.5b) angestellt wurden, in einem konkreten Fall nachvollziehen. Sei

$$M \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

Man berechnet: $p_M = \det(M - TE_3) = -T^3 + 4T^2 - 5T + 2 = (2-T)(T-1)^2$. Damit zerfällt das charakteristische Polynom von M in Linearfaktoren über $\mathbb{R}$, so daß M nach (21.5b) **trigonalisierbar** ist. Die Eigenwerte von M sind die Nullstellen von p_M, hier also 2 und 1 mit der Vielfachheit $\mu(p_M, 2) = 1$ bzw. $\mu(p_M, 1) = 2$.

Wir wollen jetzt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ bestimmen mit

$$S^{-1} \cdot M \cdot S \;=\; \text{obere Dreiecksmatrix}$$

Es ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von M zum Eigenwert 2 (es gilt $Mv_1 = 2v_1$).

$(*)$ Ergänze $\{v_1\}$ zu einer Basis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ (hier gibt es viele Wahlmöglichkeiten!)

Wir wählen $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ (dies kann man etwa mit einer Determinante begründen). Sei P die Matrix mit den Spalten v_1, v_2, v_3 (natürlich $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$)

$$P \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt nun:

$$P^{-1}\cdot M\cdot P = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & -4 \\ & \multicolumn{2}{c}{N} \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \text{mit der Matrix } N := \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),$$

die trigonalisierbar ist (dies entspricht der Induktionsvoraussetzung in dem Beweis von (21.5b)).
Für die Matrix $Q := \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt nämlich $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und

$$Q^{-1}\cdot N\cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(obere Dreiecksmatrix)}$$

Bilde nun die Matrix

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ & \multicolumn{2}{c}{Q} \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt $R \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, da $\det(R) \neq 0$, und mit $S := P\cdot R \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ ergibt sich

$$S^{-1}\cdot M\cdot S = (PR)^{-1}M(PR) = R^{-1}P^{-1}MPR = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist $S^{-1}\cdot M\cdot S$ eine obere Dreiecksmatrix.

An der Stelle $(*)$ gab es Wahlmöglichkeiten. Wir geben dafür noch zwei weitere Beispiele:

2. Möglichkeit: $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit der Matrix $P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ ist dann

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

schon gleich eine obere Dreiecksmatrix, die übrigen Schritte sind hier nicht mehr erforderlich.

3. Möglichkeit: $v_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Mit der Matrix $P := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ ist dann

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

schon gleich eine obere Dreiecksmatrix, die übrigen Schritte sind hier wieder nicht mehr erforderlich. In diesem letzten Beispiel haben wir sogar die sog. **Jordan'sche Normalform** von M gefunden, die wir später noch behandeln werden.