Kap. IV Normalformen von Endomorphismen

§ 20 . Eigenwerte und Eigenvektoren

Problem: Die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_B^B(f)$ eines Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ hängt von der zugrundegelegten Basis B ab. Zwei Darstellungsmatrizen einunddesselben Endomorphismus bzgl. verschiedener Basen sind nach (18.33) zueinander ähnlich. Es soll daher untersucht werden, ob es eine Basis gibt, bzgl. der f eine besonders einfach gebaute Darstellungsmatrix (etwa Dreiecksmatrix oder Diagonalmatrix) besitzt.

(20.1) SATZ: V sei ein K–Vektorraum mit einer Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$, und $f : V \longrightarrow V$ sei ein K–Endomorphismus. Genau dann ist die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_B^B(f)$ eine Diagonalmatrix, wenn es Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gibt mit der Eigenschaft

$$\boxed{f(v_k) \ = \ \lambda_k v_k} \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Es gilt dann $\mathrm{M}_B^B(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$.

(20.2) DEF: V sei ein beliebiger K–Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ ein K–Endomorphismus.

a) Ein Element $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert (EW) von** f, wenn es einen Vektor $v \in V$ gibt mit $v \neq o_V$ und $f(v) = \lambda v$.

b) Jeder Vektor $v \in V \setminus \{o_V\}$ mit $f(v) = \lambda v$ heißt **Eigenvektor (EV) von** f **zum Eigenwert** λ.

(20.3) BEISPIELE: **a)** Sei V ein 2–dim. $\mathbb{R}$–Vektorraum mit einer Basis $B = (v_1, v_2)$. Der $\mathbb{R}$–Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ sei definiert durch $f(v_1) = v_1$ und $f(v_2) = o_V$ (lineare Fortsetzung!) . Dann gilt: v_1 ist EV von f zum EW 1 , v_2 ist EV von f zum EW 0 . Außerdem sind 0 und 1 die einzigen EW'e von f . Die Darstellungsmatrix

$$\mathrm{M}_B^B(f) \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \mathrm{diag}(1, 0) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

von f bzgl. B ist eine Diagonalmatrix.

b) V und B seien wie in a) gewählt. Die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $g : V \longrightarrow V$ sei mit Hilfe lin. Fortsetzung definiert durch $g(v_1) = v_2$, $g(v_2) = -v_1$. Dann besitzt g **keinen** EW (in $\mathbb{R}$) .

c) Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$: 0 EW von $f \iff f$ ist kein Monomorphismus.

d) Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$: 1 EW von $f \iff f$ hat keinen "Fixpunkt" $\neq o_V$

e) Jeder Vektor $v \neq o_V$ ist EV von id_V zum EW 1.

(20.4) LEMMA: Für einen K–Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ sind äquivalent:

a) f besitzt einen Eigenwert.

b) Es gibt einen 1–dimensionalen Unterraum $U \subseteq V$ mit $f(U) \subseteq U$.

(20.5) LEMMA: $f : V \longrightarrow V$ sei ein K–Endomorphismus. Für $\lambda \in K$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) λ ist Eigenwert von f. **b)** $\mathrm{Kern}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq O$.

(20.6) DEF: $f : V \longrightarrow V$ sei ein K–Endomorphismus und λ sei ein Eigenwert von f. Dann heißt

$$\mathrm{Eig}(f, \lambda) := \mathrm{Kern}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$$

der **Eigenraum von f zum Eigenwert** λ.

(20.7) BEM: **a)** $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ is nach Definition ein Untervektorraum von V. Die vom Nullvektor verschiedenen Vektoren aus $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ sind genau die Eigenvektoren von f zum EW λ.

b) 0 EW von $f \implies \mathrm{Eig}(f, 0) = \mathrm{Kern}(f)$.

c) In Beispiel (20.3a) gilt $\mathrm{Eig}(f, 1) = \mathbb{R}v_1$, $\mathrm{Eig}(f, 0) = \mathbb{R}v_2 = \mathrm{Kern}(f)$ und $V = \mathbb{R}v_1 \oplus = \mathbb{R}v_2 = \mathrm{Eig}(f, 1) \oplus \mathrm{Eig}(f, 0)$.

d) Sei $\dim_K(V) = n < \infty$. Besitzt dann $f \in \mathrm{End}_K(V)$ den EW $\lambda \in K$, so ergibt sich mit dem Rangsatz

$$\dim_K(\mathrm{Eig}(f, \lambda)) \; = \; n - \mathrm{rg}_K(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$$

(20.8) SATZ: V sei ein beliebiger K–Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Sind dann $v_1, \ldots, v_n \in V$ Eigenvektoren zu **paarweise verschiedenen** Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von f, so ist die Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ linear unabhängig über K.

(20.9) FOLG: Gilt $\dim_K(V) = n$, so besitzt jeder K–Endomorphismus von V höchstens n Eigenwerte.

(20.10) FOLG: Sei $\dim_K(V) = n$. Besitzt $f \in \mathrm{End}_K(V)$ genau n paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so gibt es eine Basis B von V, die aus Eigenvektoren von f besteht. Es gilt dann

$$\mathrm{M}_B^B(f) \; = \; \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Achtung: Die Bedingung in (20.10) ist nicht notwendig. Für $n \geq 2$ ist $\mathrm{M}_B^B(\mathrm{id}_V) = E_n = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$ für jede Basis B von V eine Diagonalmatrix, aber 1 ist einziger EW von id_V.

Jede Matrix $M \in \mathrm{M}_n(K)$ definiert eine K–lineare Abbildung $f_M : K^n \longrightarrow K^n$ durch die Vorschrift

$$f_M(v) \;=\; M \cdot v \quad (v \in K^n)$$

Bzgl. der kanonischen Basis gilt $\mathrm{M}(f) = M$. Mit Hilfe dieser linearen Abbildung lassen sich jetzt die Begriffe "Eigenwert" und "Eigenvektor" auch für Matrizen erklären:

(20.11) DEF: Sei $M \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Matrix.

a) $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert von** M, falls λ Eigenwert von $f_M : K^n \longrightarrow K^n$ ist.

b) $v \in K^n$ heißt **Eigenvektor von** M, falls v Eigenvektor von $f_M : K^n \longrightarrow K^n$ ist.

c) $\mathrm{Eig}(M, \lambda) := \mathrm{Eig}(f_M, \lambda)$.

$\lambda \in K$ ist also genau dann EW von M wenn es einen Vektor $v \in K^n$ mit $\underline{v \neq o_n}$ gibt mit der Eigenschaft:

$$(\star) \quad M \cdot v \;=\; \lambda\, v$$

Jeder Vektor $v \in K^n \setminus \{o_n\}$, der $(\star)$ erfüllt, heißt ein Eigenvektor von M zum Eigenwert λ.

(20.12) SATZ: Für $M \in \mathrm{M}_n(K)$ und $\lambda \in K$ gilt:

a) Ist $\lambda \in K$ Eigenwert von M, so folgt $\mathrm{Eig}(M, \lambda) = \mathrm{Lös}(M - \lambda E_n\, ,\, o_n)$

b) λ Eigenwert von $M \iff \det(M - \lambda \cdot E_n) = 0$.

c) Für einen Eigenwert λ von M ist $\dim_K(\mathrm{Eig}(M, \lambda)) = n - \mathrm{rg}(M - \lambda \cdot E_n)$

(20.13) SATZ: Seien $M \in \mathrm{M}_n(K)$ und $\lambda \in K$. Dann gibt es Elemente $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ mit

$$\det(M - \lambda \cdot E_n) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n = \sum_{i=0}^{n} a_i\lambda^i \; .$$

Dabei gilt insbesondere $a_0 = \det(M)$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Sp}(M)$ und $a_n = (-1)^n$.

(20.14) BEISPIEL: Sei $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Es sollen Eigenwerte und Eigenvektoren von M bestimmt werden. Nach (20.9) hat M höchstens 3 Eigenwerte. Zur Bestimmung der Eigenwerte werden nach (20.12b) diejenigen Elemente $\lambda \in K$ bestimmt, für die $\det(M - \lambda E_3) = 0$ ist. Entwicklung nach der ersten Zeile (oder Spalte) liefert:

$$\det(M - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot ((1-\lambda)^2 - 4)$$

$$= (2-\lambda) \cdot (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 1) = \underline{-6 - \lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3}$$

Es gilt $\det(M) = -6$ und $\mathrm{Sp}(M) = 4$ in Übereinstimmung mit (20.13)! Um zugehörige Eigenvektoren zu bestimmen, ist für das jeweilige λ eine nichttriviale Lösung des homogenen LGS's $(M - \lambda E_3)x = o_3$ zu berechnen.

$\underline{\lambda = 2:}$ $\quad (M - \lambda E_3)x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = o_3 \quad \Longrightarrow \quad \text{Lös}(M - \lambda E_3, o_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Also ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ EV von M zum EW 2. Entsprechend kann man feststellen, daß $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ EV von M zum EW -1 und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ EV von M zum EW 3 ist. Damit sind v_1, v_2, v_3 als EV'en von M zu paarweise verschiedenen Eigenwerten nach (20.8) linear unabhängig und bilden daher auch eine Basis B von $\mathbb{R}^3$. Folglich

$$\mathrm{M}_B^B(f_M) \;=\; \mathrm{diag}(2, -1, 3) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Da M ebenfalls Darstellungsmatrix von f ist (und zwar bzgl. der kanonischen Basis), folgt mit (19.33), daß M und $\mathrm{M}_B^B(f_M)$ ähnliche Matrizen sind. Also ist M ähnlich zu der Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(2, -1, 3)$, bei der die Eigenwerte von f_M (oder auch M) in der Hauptdiagonale stehen.

(20.15) DEF: Ist $M \in \mathrm{M}_n(K)$, so heißt

$$p_M := \det(M - T \cdot E_n)$$

das **charakteristische Polynom der Matrix** M.

(20.16) FOLG: Seien $M \in \mathrm{M}_n(K)$ und $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

a) λ ist Eigenwert von M

b) λ ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms von M.

Beispiel: In (20.14) ist $p_M = -6 - T + 4T^2 - T^3$ das charakteristische Polynom der Matrix M. p_M besitzt die Linearfaktorzerlegung $p_M = (2 - T) \cdot (T - 3) \cdot (T + 1)$, aus der man sofort die Nullstellen $2, 3, -1$ ablesen kann. Dies sind die Eigenwerte von M.

(20.17) LEMMA: Sind die Matrizen $M, N \in \mathrm{M}_n(K)$ ähnlich, so gilt:

a) $p_M \;=\; p_N$

b) M und N haben dieselben Eigenwerte.

(20.18) DEF: V sei ein endlichdimensionaler K–Vektorraum, B sei eine beliebige Basis von V und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann ist das **charakteristische Polynom** p_f **des Endomorphismus** f definiert als das charakteristische Polynom der Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_B^B(f)$.

BEM: Da zwei Darstellungsmatrizen eines Endomorphismus ähnlich sind, folgt mit (20.14), daß p_f unabhängig von der ausgewählten Basis ist.