(19.23) SATZ: Leibniz'sche Determinantenformel

Für eine Matrix $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt:

$$\det(A) \;=\; \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$$

Hierbei bezeichnet $\operatorname{sign}(\pi)$ das **Vorzeichen** der Permutation $\pi \in S_n$. Dieses ist definiert durch $\operatorname{sign}(\pi) := (-1)^{\nu(\pi)}$, wobei $\nu(\pi)$ die Anzahl der Inversionen (Fehlstände) von π angibt.

(s. Einschub C)

Bew: Sei $d : V^n \longrightarrow K \quad (V := K^n)$ die Determinantenform aus (19.13). Insbesondere gilt dafür $d(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ die Spalten von $A = (a_{ik})$, so gilt

$$v_k \;=\; \sum_{i_k=1}^{n} a_{i_k k} e_{i_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Daraus ergibt sich mit der n–Linearität von d:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= d(v_1, v_2, \ldots, v_n) \\
&= d\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2} e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n}\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} \cdot d(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n n}) \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Sind 2 der Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_n$ gleich, so ist $d(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n n}) = 0$, da d alternierend ist. Sind dagegegen die Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_n$ paarweise verschieden, so bilden sie eine Permutation

$$\pi \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. In diesem Falle gilt nach (C.4)

$$(\star\star) \quad d(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n n}) \;=\; d(e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, \ldots, e_{\pi(n)}) \;=\; \operatorname{sign}(\pi) \cdot d(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \operatorname{sign}(\pi)$$

Da in der n–fachen Summe $(\star)$ nur solche Summanden $\neq 0$ sein können, deren Indizes eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ sind, ergibt sich mit $(\star\star)$ die behauptete Formel

$$\det(A) \;=\; \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$$