Die Determinante einer Matrix

Wir betrachten im folgenden Determinantenformen auf dem Vektorraum $V = K^n$. Eine solche Form ist eine Abbildung von n Spaltenvektoren der Länge n, die wir als die Spalten einer $(n \times n)$–Matrix auffassen können. Sei $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ eine beliebige quadratische Matrix. Wir werden die Determinante $\det(A)$ von A **rekursiv** definieren, wie es die Überlegungen im Falle $n = 3$ zu Beginn dieses Paragraphen nahelegen.

Ist $A \in \mathrm{M}_n(K)$, so bezeichnen wir mit A'_{ik} diejenige $(n-1)$–reihige quadratische Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der k–ten Spalte entsteht. Sei jetzt $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_3(K)$. Dann gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \det(A'_{11}) - a_{12} \det(A'_{12}) + a_{13} \det(A'_{13}) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{1+k} a_{1k} \cdot \det(A'_{1k})$$

Wir definieren nun allgemein:

(19.12) DEF: Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.
Die Determinante einer $(n \times n)$–Matrix $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ ist rekursiv definiert durch

$\boldsymbol{n = 1}$ $\quad \det(A) := a_{11}$ für $A = (a_{11}) \in \mathrm{M}_1(K)$

$\boldsymbol{n > 1}$: $\quad \det(A) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \cdot \det(A'_{1k}) \qquad$ (Hierbei ist $A'_{1k} \in \mathrm{M}_{n-1}(K)$)

Dies ist die sog. **Entwicklung von** $\det(A)$ **nach der 1. Zeile von** A.

Wir wollen uns davon überzeugen, daß sich im Falle $n = 2$ die bekannte Determinante ergibt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A'_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A'_{12}) = a_{11} \det((a_{22})) - a_{12} \det((a_{21}))$$

$$= \underline{\underline{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}$$

(19.13) SATZ: Sei $V := K^n$. Die Abbildung $d : V^n \longrightarrow K$ sei für $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ definiert durch

$$d(v_1, v_2, \ldots, v_n) := \det(A) \in K ,$$

wobei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ die Matrix mit den Spalten $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ist. Dann gilt:

a) d ist eine Determinantenform auf V

b) $d(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1_K$, wobei $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ die kanonische Basis von $V = K^n$ ist.

Bew: Es ist zu zeigen, daß d n–linear und alternierend ist. $d \neq o$ folgt insbesondere aus b).

Wir wollen jetzt die Eigenschaften einer Determinantenform auf $V = K^n$ in der Sprache von Matrizen auflisten:

(19.14) BEM: Es sei $\det : \mathrm{M}_n(K) \longrightarrow K$ die Abbildung, die einer Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ die in (19.12) definierte Determinante $\det(A)$ zuordnet. Dafür gilt:

a) $\det(A)$ is K–linear in jeder Spalte von A.

b) Es ist $\det(A) = 0_K$, falls zwei Spalten von A gleich sind.

c) $\det(E_n) = 1_K$

Diese drei Eigenschaften ergeben sich aus (19.13).

d) det ist die einzige Abbildung $\mathrm{M}_n(K) \longrightarrow K$, die die drei Eigenschaften a),b) und c) erfüllt (19.9).

e) $\det(A)$ ändert das Vorzeichen, wenn zwei Spalten von A vertauscht werden (19.3b).

f) $\det(A)$ ändert sich nicht, wenn man zu einer Spalte von A ein skalares Vielfaches einer anderen Spalte von A addiert (19.3a).

g) Es ist $\det(A) = 0_K$, wenn die Spalten von A linear abhängig sind (19.3c).

h) Es ist $\det(A) = 0_K$, wenn eine Spalte von A die Nullspalte ist (folgt auch aus g)).

(19.15) SATZ: Für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt: A invertierbar $\iff$ $\det(A) \neq 0_K$

(19.16) SATZ: Laplace'scher Entwicklungssatz (Entwicklung nach einer Zeile)

Sei $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ $(n \geq 2)$. Es bezeichne $A'_{ik} \in \mathrm{M}_{n-1}(K)$ diejenige Matrix, die aus A durch Streichen der i–ten Zeile und der k–ten Spalte entsteht. Dann gilt für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot \det(A'_{ik})$$

(Man bezeichnet dies als **Entwicklung von** $\det(A)$ **nach der** i**–ten Zeile**.)

Bew: Für ein beliebiges $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sei $d_i : \mathrm{M}_n(K) \longrightarrow K$ die Abbildung, die durch

$$d_i(A) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot \det(A'_{ik})$$

definiert ist. Man kann zeigen:

a) $d_i(A)$ ist K–linear in den Spalten von A.

b) $d_i(A) = 0_K$, falls zwei Spalten gleich sind.

c) $d_i(E_n) = 1_K$.

Nach (19.14d) folgt $d_i(A) = \det(A)$ für alle $A \in \mathrm{M}_n(K)$.

(19.17) SATZ: Determinantenproduktsatz

Für Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

(19.18) FOLG: Für $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt: $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

(19.19) LEMMA: Ist $G \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Elementarmatrix, so gilt: $\det({}^tG) = \det(G)$.

(19.20) SATZ: Für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt: $\det({}^tA) = \det(A)$.

Bew: S. Übung

(19.21) BEM: Da die Zeilen von $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gerade die Spalten von ${}^tA$ sind, folgt aus (19.20), daß $\det(A)$ auch die in (19.14) aufgelisteten Eigenschaften in Bezug auf die Zeilen hat, d.h. im Einzelnen:

a) $\det(A)$ is K–linear in jeder Zeile von A.

b) Es ist $\det(A) = 0_K$, falls zwei Zeilen von A gleich sind.

c) $\det(E_n) = 1_K$

d) det ist die einzige Abbildung $\mathrm{M}_n(K) \longrightarrow K$, die die drei Eigenschaften a),b) und c) erfüllt.

e) $\det(A)$ ändert das Vorzeichen, wenn zwei Zeilen von A vertauscht werden.

f) $\det(A)$ ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile von A ein skalares Vielfaches einer anderen Zeile von A addiert.

g) Es ist $\det(A) \neq 0_K$ genau dann, wenn die Zeilen von A linear unabhängig sind.

(19.22) SATZ: **Laplace'scher Entwicklungssatz (Entwicklung nach einer Spalte)**

Sei $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ $(n \geq 2)$. Es bezeichne $A'_{ik} \in \mathrm{M}_{n-1}(K)$ diejenige Matrix, die aus A durch Streichen der i–ten Zeile und der k–ten Spalte entsteht. Dann gilt für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot \det(A'_{ik})$$

(Man bezeichnet dies als **Entwicklung von** $\det(A)$ **nach der** k**–ten Spalte**.)

Das folgende Ergebnis gibt eine explizite Formel für die Determinante einer Matrix:

(19.23) SATZ: **Leibniz'sche Determinantenformel**

Für eine Matrix $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt:

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$$

Hierbei bezeichnet $\operatorname{sign}(\pi)$ das **Vorzeichen** der Permutation $\pi \in S_n$. Dieses ist definiert durch $\operatorname{sign}(\pi) := (-1)^{\nu(\pi)}$, wobei $\nu(\pi)$ die Anzahl der Inversionen (Fehlstände) von π angibt.

I) Die adjungierte Matrix

(19.24) DEF: Sei $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ $(n \geq 2)$. Dann heißt die Matrix $A^{\mathrm{ad}} := (\alpha_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ mit

$$\alpha_{ik} := (-1)^{i+k} \det(A'_{ki})$$

die zu A **adjungierte Matrix**.

(19.25) SATZ: Für $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt $A \cdot A^{\mathrm{ad}} = A^{\mathrm{ad}} \cdot A = \det(A) \cdot E_n$.

(19.26) FOLG: Ist die Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ invertierbar, so gilt

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1} \cdot A^{\mathrm{ad}}$$

II) Die Cramer'sche Regel

(19.27) SATZ: Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine invertierbare Matrix mit den Spalten $s_1, s_2, \ldots, s_n$, und es sei $b \in K^n$. Dann ist die eindeutig bestimmte Lösung $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ des LGS's $Ax = b$ gegeben durch

$$a_i = (\det(A))^{-1} \cdot \det(s_1, \ldots, s_{i-1}, b, s_{i+1}, \ldots, s_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

III) Rangbestimmung einer Matrix mit Hilfe von Determinanten

Sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und es seien $s, t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq s, t \leq \min(m, n)$. Eine $(s \times t)$–**Untermatrix** von A ist eine $(s \times t)$–Matrix, die aus A durch Streichen von $m - s$ Zeilen und $n - t$ Spalten entsteht. Die Determinante einer $(s \times s)$–Untermatrix heißt eine s–**reihige Unterdeterminante von** A.

(19.28) SATZ: Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ hat genau dann den Rang $r \geq 1$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i) A besitzt eine r–reihige Unterdeterminante $\neq 0_K$

ii) Jede $(r + 1)$–reihige Unterdeterminante von A ist gleich 0_K .

IV) Die Vandermonde'sche Determinante

(19.29) DEF: Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K \quad (n \geq 2)$ Elemente aus dem Körper K. Dann heißt die Matrix

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

$n-$ **reihige Vandermonde'sche Matrix**. Ihre Determinante heißt **Vandermonde'sche Determinante**.

(19.30) SATZ: Für $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K \quad (n \geq 2)$ gilt

$$\det\left(V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right) = \prod_{1 \leq i < k \leq n} (a_k - a_i) \ .$$

(19.31) FOLG: Für $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K \quad (n \geq 2)$ gilt:

$\det(V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \neq 0_K \iff$ die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind paarweise verschieden.