Beispiel: für das Normalformenproblem für Endomorphismen.

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die mit Hilfe linearer Fortsetzung definierte $\mathbb{R}$–lineare Abbildung mit

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dann besitzt f die Darstellungsmatrix (bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$)

$$\mathrm{M}(f) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir bilden jetzt die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_B^B(f)$ von f bzgl. der neuen Basis

$$B \;=\; \Big(\; \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:v_1} \;,\; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:v_2} \;,\; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v_3} \;\Big)$$

von $\mathbb{R}^3$. Nach Definition ist

$$\mathrm{M}_B^B(f) \;=\; (\,\kappa_B(f(v_1))\; \kappa_B(f(v_2))\; \kappa_B(f(v_3))\,)$$

Berechne nun $\kappa_B(f(v_k))$:

$$f(v_1) = f((-1)\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3) = -f(e_1) + f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \quad \Longrightarrow \quad \kappa_B(f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analog: $f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\cdot v_2 \quad \Longrightarrow \quad \kappa_B(f(v_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\cdot v_3 \quad \Longrightarrow \quad \kappa_B(f(v_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich als Darstellungsmatrix von f bzgl. B die **Diagonalmatrix**

$$\mathrm{M}_B^B(f) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$