Basiswechsel

Seien $B = (v_1, \ldots, v_n)$ und $B' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ zwei (geordnete) Basen des K–Vektorraumes V. Wir wollen den Übergang von der Basis B zu der Basis B' beschreiben. Jeder Vektor aus V kann als Linearkombination der Vektoren aus B dargestellt werden. Insbesondere gilt für alle $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$v_k \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_{ik} v'_i \quad (a_{ik} \in K)$$

Der Übergang von B nach B' wird gerade durch die Matrix $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ beschrieben:

$$v \in V \implies v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} v'_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \alpha_k \right) v'_i$$

Also
$$\kappa_{B'}(v) \;=\; A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \;=\; A \cdot \kappa_B(v)\,.$$

Die "neuen" Koordinaten von v bzgl. B' ergeben sich also durch Multiplikation von A mit den "alten" Koordinaten von v bzgl. B

Die Matrix A heißt **Transformationsmatrix zum Basiswechsel von B nach B'** und wird mit $\boldsymbol{T^B_{B'}}$ bezeichnet. Wir bilden jetzt die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}^B_{B'}(\mathrm{id}_V)$ der identischen Abbildung $\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$. Die k–te Spalte von $\mathrm{M}^B_{B'}(\mathrm{id}_V)$ ist der Koordinatenvektor

$$\kappa_{B'}(\mathrm{id}_V(v_k)) \;=\; \kappa_{B'}(v_k) \;=\; \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

d.h. $\mathrm{M}^B_{B'}(\mathrm{id}_V) = A = T^B_{B'}$. Es folgt

$$T^B_{B'} \cdot T^{B'}_B \;=\; \mathrm{M}^B_{B'}(\mathrm{id}_V) \cdot \mathrm{M}^{B'}_B(\mathrm{id}_V) \;\overset{(18.29)}{=}\; \mathrm{M}^{B'}_{B'}(\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V) \;=\; \mathrm{M}^{B'}_{B'}(\mathrm{id}_V) \;=\; E_n$$

Damit ist $T^B_{B'}$ invertierbar, und es ist $(T^B_{B'})^{-1} = T^{B'}_B$ die Transformationsmatrix zum Basiswechsel von B' nach B. Zusammenfassend:

(18.31) LEMMA: *V sei ein endlichdimensionaler K–Vektorraum. B und B' seien Basen von V. Dann gilt:*

a) $T^B_{B'} \;=\; \mathrm{M}^B_{B'}(\mathrm{id}_V)$ ist die Transformationsmatrix zum Basiswechsel von B nach B'.

b) Die Matrix $T^B_{B'}$ ist invertierbar. Ihr Inverses $(T^B_{B'})^{-1} = T^{B'}_B$ ist die Transformationsmatrix zum Basiswechsel von B' nach B.

Problem $f : V \longrightarrow W$ sei eine K–lineare Abbildung, und es sei $\dim_K(V) = n$, $\dim_K(W) = m$. Ferner seien B, B' Basen von V und C, C' Basen von W. Gibt es dann einen Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungsmatrizen $\mathrm{M}_C^B(f)$ und $\mathrm{M}_{C'}^{B'}(f)$?

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{\mathrm{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{\mathrm{id}_W} & W \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ B' & & B & & C & & C' \end{array}$$

Es ist $f = \mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V$ und damit

$$\mathrm{M}_{C'}^{B'}(f) = \mathrm{M}_{C'}^{B'}(\mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V) \overset{(18.29)}{=} \mathrm{M}_{C'}^{C}(\mathrm{id}_W) \cdot \mathrm{M}_C^B(f) \cdot \mathrm{M}_B^{B'}(\mathrm{id}_V) = T_{C'}^C \cdot \mathrm{M}_C^B(f) \cdot T_B^{B'} .$$

Sei $P := T_{C'}^C \in \mathrm{GL}_m(K)$ die Matrix zum Basiswechsel von C nach C'

und $Q := T_{B'}^B \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Matrix zum Basiswechsel von B nach B'.

Dann gilt $T_B^{B'} = Q^{-1}$, und wir erhalten zusammenfassend:

(18.32) SATZ: V und W seien K–Vektorräume der Dimension n bzw. m. B, B' seien Basen von V und C, C' seien Basen von W. Ist dann $f : V \longrightarrow W$ eine K–lineare Abbildung, so gibt es invertierbare Matrizen $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$\mathrm{M}_{C'}^{B'}(f) = P \cdot \mathrm{M}_C^B(f) \cdot Q^{-1} .$$

Dabei ist $P = T_{C'}^C$ die Transformationsmatrix zum Basiswechsel von C nach C' und $Q = T_{B'}^B$ die Transformationsmatrix zum Basiswechsel von B nach B'.

(18.33) FOLG: V sei ein n–dimensionaler K–Vektorraum mit den Basen B und B' und $f : V \longrightarrow V$ sei eine K–lineare Abbildung (auch **K–Endomorphismus von** V genannt). Dann gibt es eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$\mathrm{M}_{B'}^{B'}(f) = P \cdot \mathrm{M}_B^B(f) \cdot P^{-1} .$$

Das Normalformenproblem für lineare Abbildungen

Die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_C^B(f)$ einer K–linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$ hängt von den Basen B und C ab. Man wird daher versuchen, durch Wahl geeigneter Basen zu erreichen, daß die Darstellungsmatrix eine möglichst "einfache" Gestalt annimmt. Eine solche Matrix nennt man dann eine **Normalform** von f. Als besonders einfache Form können wir uns eine obere Dreiecksmatrix oder eine Diagonalmatrix vorstellen . Das folgende Ergebnis kennen wir bereits:

(18.34) SATZ: V und W seien K–Vektorräume der Dimension n bzw. m. $f : V \longrightarrow W$ sei eine K–lineare Abbildung vom Range r. Dann gibt es Basen $B \subseteq V$ und $C \subseteq W$ mit

$$\mathrm{M}_C^B(f) \;=\; \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

wobei $E_r \in \mathrm{M}_r(K)$ die Einheitsmatrix ist.

Äquivalenz von Matrizen

Satz (18.32) legt die folgende Definition nahe:

(18.35) DEF: Seien $M, N \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$. Dann heißt die Matrix M **äquivalent** zur Matrix N (in Zeichen: $\boldsymbol{M \sim N}$), wenn es invertierbare Matrizen $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit

$$M = P \cdot N \cdot Q^{-1}$$

(18.36) LEMMA: Für Matrizen $L, M, N \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ gilt:

a) $M \sim M$ (**Reflexivität**)

b) $M \sim N \implies N \sim M$ (**Symmetrie**)

c) $L \sim M \;\wedge\; M \sim N \implies L \sim N$ (**Transitivität**).

Damit erfüllt die Relation $\sim$ auf $\mathrm{M}_{m,n}(K)$ die Eigenschaften einer **Äquivalenzrelation**.

(18.37) SATZ: Für Matrizen $M, N \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $M \sim N$

b) $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N)$

c) Es gibt K–Vektorräume V und W, Basen B, B' von V, Basen C, C' von W und eine K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit

$$M \;=\; \mathrm{M}_C^B(f) \quad \text{und} \quad N \;=\; \mathrm{M}_{C'}^{B'}(f)$$

Das Normalformenproblem für Endomorphismen

Für einen K–Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ wird **eine** geeignete Basis $B \subseteq V$ gesucht, so daß die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_B^B(f)$ eine möglichst "einfache" Form annimmt. Als besonders einfache Form können wir uns eine obere Dreiecksmatrix oder eine Diagonalmatrix vorstellen .

Mit diesem Problem werden wir uns noch später beschäftigen.

Ähnlichkeit von Matrizen

Die folgende Definition wird durch (18.33) motiviert:

(18.38) DEF: Seien $M, N \in \mathrm{M}_n(K)$. Dann heißt die Matrix M **ähnlich** zur Matrix N (in Zeichen: $\boldsymbol{M \approx N}$), wenn es eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit der Eigenschaft: gibt mit

$$M = P \cdot N \cdot P^{-1}\,.$$

(18.39) BEM: **a)** $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{M}_n(K)$.

b) $M \approx N \implies M \sim N$.

(18.40) SATZ: Seien $M, N \in \mathrm{M}_n(K)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $M \approx N$

b) Es gibt einen K–Vektorraum V, Basen B und C von V sowie einen K–Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ mit:

$$M = \mathrm{M}^B_B(f) \quad \text{und} \quad N = \mathrm{M}^C_C(f)\,.$$

Bevor wir uns ausführlicher mit dem Normalformenproblem für Endomorphismen beschäftigen können, müssen wir zuerst noch Determinanten von Matrizen behandeln.