Wir haben bisher die Darstellungsmatrix einer K–linearen Abbildung $g : K^n \longrightarrow K^m$ gebildet und gesehen, daß diese Matrix die Abbildung g vollständig beschreibt. Wir werden im folgenden die Darstellungsmatrix einer beliebigen K–linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$ zwischen endlichdimensionalen K–Vektorräumen definieren, wobei diese Matrix von ausgewählten Basen von V und W abhängt. Ziel wird es später sein, durch geeignete Wahl dieser Basen eine möglichst "einfache" Form der Darstellungsmatrix zu erhalten, eine sog. **Normalform** für diese lineare Abbildung.

Eine Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V ist definitionsgemäß eine Menge. Bei einer Menge kommt es nicht auf die Reihenfolge der Elemente an. Bei den folgenden Überlegungen wird aber die Reihenfolge wichtig werden, so daß wir auch geordnete Basen von Vektorräumen betrachten wollen, die wir dann als Zeilenvektoren schreiben werden. Sei also $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine (geordnete) Basis von V.

Jeder Vektor $v \in V$ besitzt eine Darstellung der Form $v = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_i \in K$ $(i = 1, \ldots, n)$. Daher liefert die Zuordnung $v \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ eine K–lineare Abbildung $\kappa_B : V \longrightarrow K^n$. Alternativ können wir κ_B durch lineare Fortsetzung definieren, indem wir $\kappa_B(v_i) := e_i$ festlegen, wobei e_i der i–te Einheitsvektor aus der kanonischen Basis $\mathcal{E}_n$ von K^n ist.

$$\boxed{\kappa_B : V \longrightarrow K^n \quad , \quad v_i \longmapsto e_i \ (i = 1, \ldots, n)}$$

Umgekehrt läßt sich mit Hilfe linearer Fortsetzung eine K–lineare Abbildung

$$\boxed{\lambda_B : K^n \longrightarrow V \quad , \quad e_i \longmapsto v_i \ (i = 1, \ldots, n)}$$

definieren. Bei beiden Abbildungen wird eine Basis in eine Basis überführt, so daß sowohl κ_B als auch λ_B Isomorphismen sind. Außerdem ist auf Grund der Definition klar , daß beide Abbildungen zueinander invers sind, d.h.

$$\boxed{\lambda_B^{-1} \;=\; \kappa_B}$$

Explizit gilt $\lambda_B(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) \;=\; \sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i$.

<u>**(18.23) DEF:**</u> Sei V ein K–Vektorraum mit einer (geordneten) Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$. Besitzt dann ein Vektor $v \in V$ die Darstellung $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i$, so heißt der Spaltenvektor

$$\kappa_B(v) \;=\; \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

der **Koordinatenvektor von** v **bzgl. der Basis** B.

Die folgenden Bezeichnungen werden im folgenden stillschweigend benutzt:

V und W seien endlichdimensionale K–Vektorräume mit geordneten Basen $B = (v_1, \dots, v_n)$ bzw. $C = (w_1, \dots, w_m)$. Ferner sei $f : V \longrightarrow W$ eine K–lineare Abbildung.

$$\begin{array}{ccccc} & V & \xrightarrow{f} & W & \\ \lambda_B & \uparrow & & \downarrow & \kappa_C \\ & K^n & \xrightarrow[\overline{f}]{} & K^m & \end{array}$$

Dann ist $$\boxed{\overline{f} := \kappa_C \circ f \circ \lambda_B : K^n \longrightarrow K^m}$$

eine K–lineare Abbildung, die natürlich von den beiden Basen B und C abhängt. Von dieser Abbildung können wir die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}(\overline{f}) = (\overline{f}(e_1) \dots \overline{f}(e_n)) \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ bilden, wobei $\mathcal{E}_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis von K^n ist. Es gilt für alle $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\overline{f}(e_k) = \kappa_C \circ f \circ \lambda_B(e_k) = (\kappa_C \circ f)(\lambda_B(e_k)) = \kappa_C(f(v_k))$$

d.h. die k–te Spalte $\overline{f}(e_k)$ von $\mathrm{M}(\overline{f})$ ist gerade der Koordinatenvektor von $f(v_k)$ bzgl. der Basis C von W.

Es ist $f(v_k) = \sum_{i=1}^{m} b_{ik} w_i$, also $\kappa_C(f(v_k)) = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix} \in K^m$ und damit

$$\mathrm{M}(\overline{f}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$$

(18.24) DEF: V und W seien K–Vektorräume mit $\dim_K(V) = n$ und $\dim_K(W) = m$. Es sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und C eine geordnete Basis von W. $f : V \longrightarrow W$ sei eine K–lineare Abbildung. Dann heißt die $(m \times n)$–Matrix $\mathrm{M}_C^B(f)$, deren k–te Spalte aus dem Koordinatenvektor von $f(v_k)$ bzgl. C besteht $(k = 1, \dots, n)$, die **Darstellungsmatrix von f bzgl. B und C.**

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} r \\ r+s \end{pmatrix}$

$B = (e_1, e_2)$ $(= \mathcal{E}_2)$, $C = (w_1, w_2)$ mit $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Basen von $\mathbb{R}^2$.
Es ergibt sich:

$$\mathrm{M}_C^B(f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

Außerdem gilt z.B. $\mathrm{M}_C^B(f) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \kappa_C(f(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}))$

d.h. $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = -\frac{8}{3} \cdot w_1 + \frac{7}{3} \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ in Übereinstimmung mit der Zuordnungsvorschrift von f.

(18.25) BEM: Sei $f : V \longrightarrow W$ eine K–lineare Abbildung.

a) $\mathrm{M}_C^B(f) \;=\; (\,\kappa_C(f(v_1))\ldots\kappa_C(f(v_n))\,) \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$

b) $\mathrm{M}_C^B(f) \;=\; \mathrm{M}(\kappa_C \circ f \circ \lambda_B)$ mit $\kappa_C \circ f \circ \lambda_B : K^n \longrightarrow K^m$

c) Besitzt $v \in V$ den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ bzgl. B, so hat $f(v)$ den Koordinatenvektor $\mathrm{M}_C^B(f) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^m$ bzgl. C, d.h. $\boxed{\kappa_C(f(v)) \;=\; \mathrm{M}_C^B(f) \cdot \kappa_B(v)}$

d) Für eine K–lineare Abbildung $g : K^n \longrightarrow K^m$ gilt $\mathrm{M}(g) \;=\; \mathrm{M}_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{E}_n}(g)$, so daß die alte Definition einer Darstellungsmatrix in der neuen enthalten ist.

(18.26) SATZ: V und W seien endlichdimensionale K–Vektorräume mit geordneten Basen B bzw. C. Ist dann $f : V \longrightarrow W$ eine K–lineare Abbildung, so gilt

$$\mathrm{rg}_K(f) \;=\; \mathrm{rg}(\mathrm{M}_C^B(f))$$

(18.27) SATZ: V und W seien endlichdimensionale K–Vektorräume mit geordneten Basen B bzw. C. Dann ist die Abbildung

$$\Phi_C^B \;:\; \mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \mathrm{M}_{m,n}(K) \quad , \quad f \longmapsto \mathrm{M}_C^B(f)$$

ein K–Isomorphismus.

(18.28) FOLG: Für endlichdimensionale K–Vektorräume V und W gilt

$$\dim_K(\mathrm{Hom}_K(V, W)) \;=\; \dim_K(V) \cdot \dim_K(W)$$

(18.29) SATZ: V, W und X seien endlichdimensionale K–Vektorräume mit geordneten Basen B, C bzw. D. Sind dann $f : V \longrightarrow W$ und $g : W \longrightarrow X$ K–lineare Abbildungen, so gilt für die Darstellungsmatrix der Hintereinanderausführung $g \circ f : V \longrightarrow X$

$$\mathrm{M}_D^B(g \circ f) \;=\; \mathrm{M}_D^C(g) \cdot \mathrm{M}_C^B(f)$$

(18.30) FOLG: $f : V \longrightarrow W$ sei eine K–lineare Abbildung, B und C seien beliebige geordnete Basen von V bzw. W. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) f ist ein K–Isomorphismus

b) $\mathrm{M}_C^B(f) \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Zusatz: Ist f ein K–Isomorphismus, so gilt $\mathrm{M}_C^B(f)^{-1} \;=\; \mathrm{M}_B^C(f^{-1})$