Wir wollen jetzt den Zusammenhang zwischen dem Rang einer Matrix und dem Rang einer linearen Abbildung genauer untersuchen. Für eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ bezeichnen wir die Spalten mit

$$s_1(A), s_2(A), \ldots, s_n(A) \in K^m = \mathrm{M}_{m,1}(K)$$

und die Zeilen mit

$$z_1(A), z_2(A), \ldots, z_m(A) \in \mathrm{M}_{1,n}(K)$$

Ferner sei $S(A) := \mathcal{L}_K(\{s_1(A), s_2(A), \ldots, s_n(A)\}) \subseteq K^m$ der **Spaltenraum** von A und $Z(A) := \mathcal{L}_K(\{z_1(A), z_2(A), \ldots, z_n(A)\}) \subseteq \mathrm{M}_{1,n}(K)$ der **Zeilenraum** von A.

(18.14) DEF: Sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ eine Matrix. Dann heißt

a) $\mathrm{rg}_s(A) := \dim_K(S(A))$ der **Spaltenrang von** A

b) $\mathrm{rg}_z(A) := \dim_K(Z(A))$ der **Zeilenrang von** A.

(18.15) BEM: Für $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ gilt

a) $0 \le \mathrm{rg}_s(A) \le \min(m,n)$

b) $0 \le \mathrm{rg}_z(A) \le \min(m,n)$.

(18.16) LEMMA: Für eine K–lineare Abbildung $f : K^n \longrightarrow K^m$ gilt $\mathrm{rg}_K(f) = \mathrm{rg}_s(\mathrm{M}(f))$.

(18.17) LEMMA: Für eine Treppenmatrix $T \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ gilt:

$$\mathrm{rg}_s(T) = \mathrm{rg}_z(T) = \mathrm{rg}(T)$$

(18.18) LEMMA: Sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$. Sind $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ invertierbare Matrizen, so gilt für den Spaltenrang

$$\mathrm{rg}_s(PAQ) \; = \; \mathrm{rg}_s(A)$$

Im folgenden benötigen wir eine Beschreibung von elementaren Zeilenumformungen, die zur Berechnung der Treppenform einer Matrix erforderlich waren, mit Hilfe von Elementarmatrizen. Es wird sich herausstellen, daß jede elementare Zeilenumformung einer Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ durch Linksmultiplikation mit einer (invertierbaren) Elementarmatrix bewirkt werden kann.

Einschub A) Elementarmatrizen

(18.19) LEMMA: Sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$. Ist $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ eine invertierbare Matrix, so gilt für den Zeilenrang

$$\mathrm{rg}_z(PA) \;=\; \mathrm{rg}_z(A)$$

(18.20) SATZ: Für eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ gilt

$$\mathrm{rg}_s(A) \;=\; \mathrm{rg}_z(A) \;=\; \mathrm{rg}(A)$$

(18.21) SATZ: Sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ eine Matrix vom Rang r. Dann gibt es invertierbare Matrizen $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$P \cdot A \cdot Q \;=\; \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

(Hierbei ist E_r die r–reihige Einheitsmatrix, und O bezeichnet eine passende Nullmatrix).

(18.22) FOLG: Für Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$

b) Es gibt invertierbare Matrizen $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = P \cdot A \cdot Q$.