§18. Die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_2 - 2a_4 \\ a_3 - a_4 \end{pmatrix}$. Man prüft leicht nach, daß f $\mathbb{R}$–linear ist. Es sei $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^4$. Jeder Vektor $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ läßt sich dann darstellen in der Form $v = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$. Da f $\mathbb{R}$–linear ist, folgt hieraus

$$(*) \quad f(v) = a_1f(e_1) + a_2f(e_2) + a_3f(e_3) + a_4f(e_4)$$

d.h. $f(v)$ ist eine Linearkombination der Vektoren $f(e_1), \ldots, f(e_4)$. Es gilt speziell

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \ f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \ f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \ f(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir bilden nun die (3×4)–Matrix A, deren Spalten gerade diese Vektoren sind:

$$A = (\, f(e_1)\, f(e_2)\, f(e_3)\, f(e_4)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt für alle $v \in \mathbb{R}^4$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \overset{(**)}{=} a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= a_1f(e_1) + a_2f(e_2) + a_3f(e_3) + a_4f(e_4) \overset{(*)}{=} f(v)$$

Hierbei gilt $(**)$ nach dem Beweis von (10.9) aus LA I . Wir werden später sehen, daß diese Matrix wichtige Informationen über die lineare Abbildung f enthält. Wir nennen A die Darstellungsmatrix von f. Allgemeiner:

(18.1) DEF: Sei $f : K^n \longrightarrow K^m$ eine K–lineare Abbildung. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sei die kanonische Basis von K^n. Dann heißt die $(m \times n)$–Matrix, die aus den n Spaltenvektoren $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \in K^m$ gebildet wird, die **Darstellungsmatrix von** f. Sie wird mit $\mathrm{M}(f)$ bezeichnet.

Es ist also $\mathrm{M}(f) \; = \; (\, f(e_1)\, f(e_2) \, \dots \, f(e_n)\,) \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$

(18.2) LEMMA: Ist $f : K^n \longrightarrow K^m$ eine K–lineare Abbildung, so gilt $f(v) = \mathrm{M}(f) \cdot v$ für alle $v \in K^n$, d.h. $f \; = \; f_{\mathrm{M}(f)}$.

(18.3) LEMMA: **a)** Sind $f, g : K^n \longrightarrow K^m$ K–lineare Abbildungen, so gilt:
$\mathrm{M}(f) = \mathrm{M}(g) \implies f = g$

b) Zu jeder Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ gibt es eine K–lineare Abbildung $f : K^n \longrightarrow K^m$ mit $\mathrm{M}(f) = A$.

(18.4) LEMMA: Sind $f, g : K^n \longrightarrow K^m$ K–lineare Abbildungen, so gilt:

a) $\mathrm{M}(f + g) \; = \; \mathrm{M}(f) + \mathrm{M}(g)$

b) $\mathrm{M}(af) \; = \; a\mathrm{M}(f) \quad (\forall\, a \in K)$.

(18.5) SATZ: Die Abbildung $\varphi : \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \longrightarrow \mathrm{M}_{m,n}(K)$, die durch

$$\varphi(f) := \mathrm{M}(f) \;\text{ für alle } f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$$

definiert wird, ist ein K–Isomorphismus. Insbesondere gilt $\dim_K(\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)) = m \cdot n$.

Problem: $f : K^p \longrightarrow K^n$ und $g : K^n \longrightarrow K^m$ seien K–lineare Abbildungen. Nach (17.22) ist dann auch $g \circ f : K^p \longrightarrow K^m$ eine K–lineare Abbildung. Für jede einzelne Abbildung können wir die Darstellungsmatrix bilden. Seien

$$A := \mathrm{M}(g) \in \mathrm{M}_{m,n}(K) \;\; , \;\; B := \mathrm{M}(f) \in \mathrm{M}_{n,p}(K) \;\; , \;\; C := \mathrm{M}(g \circ f) \in \mathrm{M}_{m,p}(K)$$

Gibt es einen Zusammenhang zwischen diesen drei Darstellungsmatrizen?

Setze $h := g \circ f$. Für ein beliebiges $v \in K^p$ gilt dann

$$C \cdot v = h(v) = g(f(v)) = g(B \cdot v) = A \cdot (B \cdot v)$$

$$\boxed{(\star) \quad \forall\, v \in K^p : \; A \cdot (B \cdot v) \; = \; C \cdot v}$$

Wir werden im folgenden eine Multiplikation von Matrizen erklären, die es uns erlaubt, die Matrix C als Produkt der beiden Matrizen A und B aufzufassen.

Seien $A = (a_{ik})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ k=1,2,\dots,n}}$, $B = (b_{kl})_{\substack{k=1,2,\dots,n \\ l=1,2,\dots,p}}$, $C = (c_{il})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ l=1,2,\dots,p}}$

Sei $e_l \in K^p$ der l–te Einheitsvektor. Nach $(\star)$ gilt dann

$$(\star\star) \quad A \cdot (B \cdot e_l) \; = \; C \cdot e_l \quad (\forall\, l = 1, 2, \dots, p)$$

Das Produkt einer Matrix D, die p Spalten hat, und dem Einheitsvektor e_l ergibt gerade den l–ten Spaltenvektor von D . Mit $B \cdot e_l = \begin{pmatrix} b_{1l} \\ \vdots \\ b_{nl} \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$A \cdot (B \cdot e_l) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1l} \\ \vdots \\ b_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{1l} + \ldots + a_{1n}b_{nl} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{1l} + \ldots + a_{mn}b_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kl} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kl} \end{pmatrix}$$

Auf der anderen Seite ist $C \cdot e_l = \begin{pmatrix} c_{1l} \\ \vdots \\ c_{ml} \end{pmatrix}$. Wegen $(\star\star)$ folgt

$$c_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m \ \forall\, l = 1, 2, \ldots, p$$

Wir definieren jetzt das Matrizenprodukt $A \cdot B$ als die Matrix C :

(18.6) DEF: Das **Produkt** $A \cdot B$ einer $(m \times n)$–Matrix $A = (a_{ik})$ und einer $(n \times p)$–Matrix $B = (b_{kl})$ ist definiert als die $(m \times p)$–Matrix $C = (c_{il})$ mit den Elementen

$$\boxed{c_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m \ \forall\, l = 1, 2, \ldots, p}$$

Achtung! Das Matrizenprodukt $A \cdot B$ ist **nur** definiert, wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt.

Aus den obigen Überlegungen ergibt sich sofort das folgende Ergebnis:

(18.7) SATZ: Für K–lineare Abbildungen $f : K^p \longrightarrow K^n$ und $g : K^n \longrightarrow K^m$ gilt

$$\mathrm{M}(g \circ f) = \mathrm{M}(g) \cdot \mathrm{M}(f)$$

(18.8) FOLG: Sind A, B, C drei Matrizen, für die sich das Matrizenprodukt $(A \cdot B) \cdot C$ bilden läßt, so gilt

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

(18.9) FOLG: $(\mathrm{M}_n(K), +, \cdot)$ ist ein Ring mit der Einheitsmatrix E_n als Einselement. Für $n \geq 2$ ist dieser Ring **nicht** kommutativ und **nicht** nullteilerfrei.

Eine Einheit in dem Ring $(\mathrm{M}_n(K), +, \cdot)$ heißt auch **invertierbare Matrix**. Man setzt $\mathrm{M}_n(K)^\star =: \mathrm{GL}_n(K)$. $(\mathrm{GL}_n(K), \cdot)$ ist eine Gruppe, die sog. **allgemeine lineare Gruppe**.

(18.10) LEMMA: $f : K^n \longrightarrow K^m$ sei eine K–lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix $A := \mathrm{M}(f)$. Dann gilt:

a) f injektiv $\iff$ die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig

b) f surjektiv $\iff$ die Spaltenvektoren von A bilden ein EZS von K^m

c) f bijektiv $\iff$ die Spaltenvektoren von A bilden eine Basis von K^m.

(18.11) SATZ: Eine K–lineare Abbildung $f : K^n \longrightarrow K^n$ ist genau dann ein K–Isomorphismus, wenn die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}(f) \in \mathrm{M}_n(K)$ invertierbar ist. In diesem Falle gilt dann

$$\mathrm{M}(f)^{-1} = \mathrm{M}(f^{-1})$$

(18.12) FOLG: Für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) A ist invertierbar

b) Die Spaltenvektoren von A bilden eine Basis von K^n

c) Die Spaltenvektoren von A bilden ein EZS von K^n

d) Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.

(18.13) FOLG: Für eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) A ist invertierbar, d.h. es existiert eine Matrix $B \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $A \cdot B = E_n = B \cdot A$

b) Es gibt eine Matrix $C \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $C \cdot A = E_n$

c) Es gibt eine Matrix $D \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $A \cdot D = E_n$.