Bew: **1) Eindeutigkeit**

Seien $f, g : V \longrightarrow W$ zwei K–lineare Abbildungen mit $f(v_i) = w_i$ und $g(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$. Dann folgt $f(v_i) = g(v_i) \ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Da B als Basis von V insbesondere auch ein EZS von V ist, ergibt sich $f = g$ mit (17.32). Also gibt es höchstens eine lineare Abbildung mit der gewünschten Eigenschaft.

2) Existenz

Wir müssen den Bildwert $f(v) \in W$ für ein beliebiges $v \in V$ in eindeutiger Weise festlegen. Da B eine Basis von V ist, besitzt **jeder** Vektor $v \in V$ eine Darstellung der Form

$$\boxed{v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i}$$

mit **eindeutig** bestimmten Koeffizienten $a_i \in K$. Definiere in diesem Fall:

$$(*) \quad \boxed{f(v) := \sum_{i=1}^{n} a_i w_i}$$

Dann ist $f(v)$ ein Vektor aus W, der durch v eindeutig bestimmt ist. Durch $v \longmapsto f(v)$ ist damit eine eindeutige Zuordnungsvorschrift erklärt, die eine **Abbildung** $f : V \longrightarrow W$ definiert.

Es wird nun gezeigt, daß f **K–linear** ist.

L₁) Seien $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, $v' = \sum_{i=1}^{n} a'_i v_i$ zwei beliebige Vektoren aus V.

Dann ist $v + v' = \sum_{i=1}^{n} (a_i + a'_i) v_i$. Damit folgt:

$$\underline{\underline{f(v + v')}} \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} (a_i + a'_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i + \sum_{i=1}^{n} a'_i w_i \overset{(*)}{=} \underline{\underline{f(v) + f(v')}}$$

L₂) Seien $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$ und $r \in K$ beliebig. Dann ist $rv = \sum_{i=1}^{n} (r a_i) v_i$, und es folgt

$$\underline{\underline{f(rv)}} \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} (r a_i) w_i = r \left(\sum_{i=1}^{n} a_i w_i \right) \overset{(*)}{=} \underline{\underline{r f(v)}}$$

Als letztes bleibt zu zeigen, daß $f(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt.

Es ist $v_i = 0v_1 + \ldots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \ldots + 0v_n$. Nach Definition von f folgt

$$f(v_i) = 0w_1 + \ldots + 0w_{i-1} + 1w_i + 0w_{i+1} + \ldots + 0w_n = w_i$$

Damit ist alles bewiesen.

BEM: Die Aussage des Satzes (17.33) gilt auch für den Fall, daß V ein unendlichdimensionaler Vektorraum ist.

(17.34) SATZ: Für zwei endlichdimensionale $\boldsymbol{K}$–Vektorräume $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ gilt:

$$\boldsymbol{V} \cong \boldsymbol{W} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{V}) = \mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{W})$$

(17.35) FOLG: Ist $\boldsymbol{V}$ ein $\boldsymbol{K}$–Vektorraum der Dimension $\boldsymbol{n}$, so folgt

$$\boldsymbol{V} \cong \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{n}}$$

(17.36) DEF: Für eine beliebige $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ wird

$$\mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{f}) := \mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\mathrm{Bild}(\boldsymbol{f}))$$

der $\boldsymbol{K}$–**Rang von** $\boldsymbol{f}$ genannt.

(17.37) BEM: Sei $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung.

a) $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{W}) < \infty \implies \mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{f}) < \infty$

b) Ist $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{V}$ ein endliches EZS von $\boldsymbol{V}$, so ist $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E})$ ein endliches EZS von Bild$(\boldsymbol{f})$. Also ist $\mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{f})$ die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren aus $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E})$. Folglich:
$\mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{V}) < \infty \implies \mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{f}) < \infty$

c) Im Falle $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{W}) < \infty$ gilt: $\boldsymbol{f}$ surjektiv $\iff \mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{f}) = \mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{W})$

d) $\boldsymbol{f}$ injektiv $\iff \mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\mathrm{Kern}(\boldsymbol{f})) = \mathbf{0}$

(17.38) Beispiele: **a)** Für $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ gilt: $\mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{f}) = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{f} = \boldsymbol{o}$

b) $\mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\mathrm{id}_{\boldsymbol{V}}) = \mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{V})$, falls $\boldsymbol{V}$ endlichdimensional ist.

c) Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{\mathbf{3,4}}(\mathbb{R})$. Für die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{A}} : \mathbb{R}^{\mathbf{4}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ gilt

dann $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\}$, wobei $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{e}_{\mathbf{2}}, \boldsymbol{e}_{\mathbf{3}}, \boldsymbol{e}_{\mathbf{4}}\}$ die kanonische Basis

von $\mathbb{R}^{\mathbf{4}}$ ist. Mit (17.37b) ergibt sich $\mathrm{rg}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{A}}) = \mathbf{2}$. Es ist aber auch $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{2}$, da $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$.

Frage: Ist diese Übereinstimmung Zufall ?

(17.39) LEMMA: $\boldsymbol{V, W, X, Y}$ seien endlichdimensionale $\boldsymbol{K}$–Vektorräume, und es seien $\boldsymbol{f : V \longrightarrow W, g : W \longrightarrow X}$, $\boldsymbol{h : X \longrightarrow Y}$ $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildungen. Dann gilt:

a) $\boldsymbol{f}$ surjektiv $\Longrightarrow \mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{g \circ f}) = \mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{g})$

b) $\boldsymbol{h}$ injektiv $\Longrightarrow \mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{h \circ g}) = \mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{g})$

c) $\boldsymbol{f}$ surjektiv und $\boldsymbol{h}$ injektiv $\Longrightarrow \mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{h \circ g \circ f}) = \mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{g})$.

Bew: Übungsaufgabe 28 .

(17.40) LEMMA: Sei $\boldsymbol{f : V \longrightarrow W}$ eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung. Ist $\boldsymbol{V}$ endlichdimensional, so gibt es einen Untervektorraum $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{V}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $\boldsymbol{V} = \mathrm{Kern}(\boldsymbol{f}) \oplus \boldsymbol{U}$ **ii)** $\boldsymbol{U} \cong \mathrm{Bild}(\boldsymbol{f})$

(17.41) RANGSATZ für lineare Abbildungen

$\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ seien $\boldsymbol{K}$–Vektorräume, und $\boldsymbol{f : V \longrightarrow W}$ sei eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung. Ist dann $\boldsymbol{V}$ endlichdimensional, so gilt:

a) $\mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{f}) < \infty$

b) $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{V}) = \mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\mathrm{Kern}(\boldsymbol{f})) + \mathrm{rg}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{f})$.

(17.42) FOLG: $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ seien **endlichdimensionale** $\boldsymbol{K}$–Vektorräume mit $\mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{V}) = \mathbf{dim}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{W})$. Für eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung $\boldsymbol{f : V \longrightarrow W}$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:

a) $\boldsymbol{f}$ ist injektiv

b) $\boldsymbol{f}$ ist surjektiv

c) $\boldsymbol{f}$ ist bijektiv .

(17.43) BEM: **a)** Ein entsprechendes Ergebnis gilt für eine Abbildung $\boldsymbol{f : M \longrightarrow N}$ zwischen zwei **endlichen** Mengen mit gleicher Elementzahl:

Im Falle $|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{N}|$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\boldsymbol{f}$ ist injektiv

b) $\boldsymbol{f}$ ist surjektiv

c) $\boldsymbol{f}$ ist bijektiv .

b) Sind $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ **unendlichdimensionale** $\boldsymbol{K}$–Vektorräume, so gilt (17.42) i.a. nicht mehr ! (s. Aufgabe 25)