Wir führen nun lineare Abbildungen als "strukturverträgliche" Abbildungen zwischen Vektorräumen ein. Sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ eine beliebige Matrix. Wir definieren eine Abbildung

$$f_A : K^n \longrightarrow K^m \quad , \quad f_A(v) := Av \quad (\forall\, v \in K^n)$$

Nach (9.7) gilt dann

$$f_A(v+v') \;=\; f_A(v) + f_A(v') \quad (\forall\, v, v' \in K^n)$$

$$f_A(\alpha v) \;=\; \alpha f_A(v) \quad (\forall\, \alpha \in K\,,\ \forall\, v \in K^n)$$

Wir nehmen dies als Anlass für die folgende Definition:

(17.18) DEF: K sei ein beliebiger Körper. V und W seien Vektorräume über K. Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt K**–linear** (oder kurz **linear** oder auch K**–Homomorphismus**), wenn gilt:

L_1) $f(v+v') \;=\; f(v) + f(v') \quad (\forall\, v, v' \in V)$

L_2) $f(\alpha\, v) \;=\; \alpha\, f(v) \quad (\forall\, \alpha \in K\,,\ \forall\, v \in V)\,.$

Die Menge aller K–linearen Abbildungen von V nach W wird mit $\mathbf{Hom}_K(V, W)$ bezeichnet.

(17.19) Beispiele: **a)** Jede Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ definiert durch die Vorschrift

$$f_A(v) := Av \quad (\forall\, v \in K^n)$$

eine K–lineare Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^m$.

b) Ist V ein K–Vektorraum, so ist die Identität $\mathbf{id}_V : V \longrightarrow V$ eine K–lineare Abbildung.

c) Sind V, W K–Vektorräume, so ist die Nullabbildung $o : V \longrightarrow W\ ,\ v \longmapsto o_W$, eine K–lineare Abbildung.

d) Ist V ein K–Vektorraum, so heißt eine K–lineare Abbildung $V \longrightarrow K$ auch eine K–**Linearform auf** V.

e) Sind V_1, V_2, W K–Vektorräume, so heißt eine Abbildung $f : V_1 \times V_2 \longrightarrow W$ K**–bilinear**, wenn f in jedem Argument K–linear ist.

(17.20) SATZ: **Eigenschaften linearer Abbildungen**

V und W seien K–Vektorräume über einem beliebigen Körper K. Für eine K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ gilt:

a) $f(o_V) = o_W$

b) $f(-v) = -f(v)$ für alle $v \in V$

c) $f(v - v') = f(v) - f(v')$ für alle $v, v' \in V$

d) $f(av + a'v') = af(v) + a'f(v')$ für alle $a, a' \in K, v, v' \in V$

e) $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f(v_i) \;\; (\forall\, a_i \in K, v_i \in V)$.

(17.21) LEMMA: Sind $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ $\boldsymbol{K}$–Vektorräume über einem beliebigen Körper $\boldsymbol{K}$, so ist $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ ein Untervektorraum des K–Vektorraumes $\boldsymbol{\mathcal{A}(V,W)}$ aller Abbildungen von $\boldsymbol{V}$ nach $\boldsymbol{W}$.

(17.22) LEMMA: Sind $\boldsymbol{f : V \longrightarrow W}$ und $\boldsymbol{g : W \longrightarrow X}$ $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildungen, so ist auch die Hintereinanderausführung $\boldsymbol{g \circ f : V \longrightarrow X}$ $\boldsymbol{K}$–linear. (Beweis s. Aufgabe 22)

(17.23) DEF: Für eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung $\boldsymbol{f : V \longrightarrow W}$ definiert man:

a) $\mathbf{Kern}(\boldsymbol{f}) := \{\, \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \;,\; \boldsymbol{f(v) = o_W} \,\} \subseteq \boldsymbol{V}$

b) $\mathbf{Bild}(\boldsymbol{f}) := \{\, \boldsymbol{f(v)} \mid \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \,\} \subseteq \boldsymbol{W}$.

(17.24) SATZ: Für eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung $\boldsymbol{f : V \longrightarrow W}$ gilt:

a) $\boldsymbol{U \subseteq V}$ Untervektorraum $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{f(U) \subseteq W}$ Unterraum

b) $\boldsymbol{X \subseteq W}$ Untervektorraum $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{f^{-1}(X) \subseteq V}$ Unterraum.

(17.25) FOLG: Ist $\boldsymbol{f : V \longrightarrow W}$ eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung, so gilt:

a) $\mathrm{Bild}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f(V)}$ ist ein Untervektorraum von $\boldsymbol{W}$

b) $\mathrm{Kern}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f^{-1}(\{0_W\})}$ ist ein Untervektorraum von $\boldsymbol{V}$.

(17.26) SATZ: Für eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung $\boldsymbol{f : V \longrightarrow W}$ gilt:

a) $\boldsymbol{f}$ injektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(\boldsymbol{f}) = \mathbf{0}$

b) $\boldsymbol{f}$ surjektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Bild}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{W}$.

(17.27) DEF: $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ seien $\boldsymbol{K}$–Vektorräume über einem beliebigen Körper $\boldsymbol{K}$.

a) Eine injektive $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung $\boldsymbol{f : V \longrightarrow W}$ heißt ein $\boldsymbol{K}$**–Monomorphismus** von $\boldsymbol{V}$ nach $\boldsymbol{W}$.

b) Eine surjektive $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung $\boldsymbol{f : V \longrightarrow W}$ heißt ein $\boldsymbol{K}$**–Epimorphismus** von $\boldsymbol{V}$ auf $\boldsymbol{W}$.

c) Eine bijektive $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung $\boldsymbol{f : V \longrightarrow W}$ heißt ein $\boldsymbol{K}$**–Isomorphismus** von $\boldsymbol{V}$ auf $\boldsymbol{W}$.

d) $\boldsymbol{V}$ heißt $\boldsymbol{K}$**–isomorph** zu $\boldsymbol{W}$ (in Zeichen: $\boldsymbol{V \cong_K W}$ oder kurz: $\boldsymbol{V \cong W}$), wenn es einen $\boldsymbol{K}$–Isomorphismus von $\boldsymbol{V}$ auf $\boldsymbol{W}$ gibt.

(17.28) LEMMA: V, W und X seien K–Vektorräume über einem beliebigen Körper K.

a) $\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$ ist ein K–Isomorphismus.

b) Ist $f : V \longrightarrow W$ ein K–Isomorphismus, so ist auch $f^{-1} : W \longrightarrow V$ ein K–Isomorphismus.

c) Sind $f : V \longrightarrow W$ und $g : W \longrightarrow X$ K–Isomorphismen, so ist auch die Hintereinanderausführung $g \circ f : V \longrightarrow X$ ein K–Isomorphismus.

(17.29) FOLG: Für K–Vektorräume V, W, X gilt:

a) $V \cong V$ (Reflexivität)

b) $V \cong W \implies W \cong V$ (Symmetrie)

c) $V \cong W \ \wedge \ W \cong X \implies V \cong X$ (Transitivität).

(17.30) SATZ: $f : V \longrightarrow W$ sei eine K–lineare Abbildung und $T \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Dann gilt:

a) Ist f injektiv und ist T linear unabhängig, so ist $f(T)$ linear unabhängig

b) Ist E ein EZS von V, so ist $f(E)$ ein EZS von Bild(f)

c) Ist f surjektiv und ist E ein EZS von V, so ist $f(E)$ ein EZS von W

d) Ist $f(T)$ ein EZS von W, so ist f surjektiv.

(17.31) FOLG: $f : V \longrightarrow W$ sei ein K–Isomorphismus. Ist dann V endlichdimensional, so ist auch W endlichdimensional, und es gilt $\dim_K(V) = \dim_K(W)$

(17.32) LEMMA: $f, g : V \longrightarrow W$ seien K–lineare Abbildungen, und $E \subseteq V$ sei ein EZS von V. Gilt dann $f(e) = g(e)$ für alle $e \in E$, so folgt $f = g$.
Oder anders formuliert: $f|E = g|E \implies f = g$.

(17.33) SATZ über lineare Fortsetzung:

V und W seien K–Vektorräume über einem beliebigen Körper K, und $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ sei eine Basis von V. Zu beliebig vorgegebenen Vektoren $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$ gibt es dann genau eine K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Fazit: Um eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ zu definieren, braucht man die Zuordnungsvorschrift **nur** für die Elemente einer (endlichen) Basis von V anzugeben. Durch **lineare Fortsetzung** ist die Abbildung dann auf ganz V definiert.