§17 Lineare Abbildungen

Wir beginnen mit der Klärung des Abbildungsbegriffes.

(17.1) DEF: M und N seien nichtleere Mengen. Eine **Abbildung** f von M nach N (in Zeichen: $f : M \longrightarrow N$) ordnet jedem Element aus M genau ein Element aus N zu.

Die Menge aller Abbildungen von M nach N werde mit $\mathcal{A}(M, N)$ bezeichnet.

(17.2) BEM: **a)** Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen: Ist $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung, so heißt M der **Definitionsbereich von** f und N der **Wertebereich von** f.

Ist x ein Element aus M, so wird das dem x durch f zugeordnete Element y aus N mit $y =: f(x)$ bezeichnet. Man schreibt auch $x \longmapsto y$. $f(x)$ heißt der **Bildwert von** x **unter** f.

Ist y ein Element aus N, so heißt jedes Element $x \in M$ mit $y = f(x)$ ein **Urbild von** y **unter** f.

Die Menge $G_f := \{ (x, f(x)) \mid x \in M \} \subseteq M \times N$ heißt der **Graph von** f.

b) Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung und G_f der Graph von f. Da " y ist Bild von x unter f" formal $(x, y) \in G_f$ bedeutet, können wir folgendermaßen zu einer präziseren Definition einer Abbildung kommen (unter einer **Relation** zwischen zwei Mengen M und N verstehen wir irgendeine Teilmenge des kartesischen Produktes $M \times N$):

Eine **Abbildung** $f : M \longrightarrow N$ ist eine **Relation** $f \subseteq M \times N$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $\forall x \in M \, \exists y \in N : (x, y) \in f$ (f ist **linkstotal**)

ii) $\forall x \in M \, \forall y_1 \in N \, \forall y_2 \in N : (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2$ (f ist **rechtseindeutig**).

Fazit: Eine Abbildung ist eine linkstotale und rechtseindeutige Relation zwischen zwei Mengen.

Erfüllt die Relation $f \subseteq M \times N$ nur die Bedingung ii), so heißt f auch eine **partielle Abbildung**.

(17.3) Beispiele: **a)** Funktionen aus der Analysis sind Abbildungen, etwa $\sin, \cos, \exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

b) M, N beliebige Mengen, $y_0 \in N$ fest: $k : M \longrightarrow N$, $k(x) := y_0$ $(\forall x \in M)$ oder kurz $x \longmapsto y_0$ ist eine **konstante Abbildung**.

c) $\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M$, $x \longmapsto x$, heißt **identische Abbildung auf** M.

d) Ist $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung und $T \subseteq M$ eine Teilmenge, so heißt die Abbildung $f|T : T \longrightarrow N$, $(f|T)(x) := f(x)$ $(\forall x \in T)$ die **Einschränkung von** f **auf** T.

e) Ist $T \subseteq M$ eine Teilmenge, so heißt die Abbildung $i : T \longrightarrow M$, $i(x) := x$ $(\forall x \in T)$ die **Inklusionsabbildung** $(i = \mathrm{id}_M|T)$.

f) Die Abbildung $p_M : M \times N \longrightarrow M \ , \ (x,y) \longmapsto x$, heißt **Projektionsabbildung** .

g) Ist $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine endliche Menge, so läßt sich eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ durch explizite Angabe aller Bildwerte $f(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n\})$ definieren. Dies kann etwa mit Hilfe einer Tabelle oder einer Zeichnung geschehen.

(17.4) DEF: $f : M \longrightarrow N$ und $g : M' \longrightarrow N'$ seien Abbildungen. Dann ist die Gleichheit $f = g$ definiert durch:

$$f = g \ :\Longleftrightarrow \begin{cases} M = M' \\ N = N' \\ \forall\, x \in M : f(x) = g(x) \end{cases}$$

Sind $f, g : M \longrightarrow N$ zwei Abbildungen mit demselben Definitionsbereich und derselben Wertemenge, so gilt:

$$f = g \iff \forall\, x \in M : f(x) = g(x)$$

$$f \neq g \iff \exists\, x_0 \in M : f(x_0) \neq g(x_0)$$

(17.5) DEF: $f : M \longrightarrow N$ sei eine Abbildung.

a) Für eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt $f(U) := \{\, f(x) \mid x \in U \,\} \subseteq N$ die **Bildmenge von U unter f**.

Insbesondere heißt $f(M) =: \mathrm{Bild}(f)$ das **Bild von$f$**.

b) Für eine Teilmenge $V \subseteq N$ heißt $f^{-1}(V) := \{\, x \mid x \in M, f(x) \in V \,\} \subseteq M$ die **Urbildmenge von V unter f**.

Achtung: $f^{-1}(V)$ ist die **Menge** aller Urbilder von allen Elementen aus V. Dies hat **nichts** mit der Existenz einer Umkehrabbildung zu tun!

(17.6) DEF: Sind $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ Abbildungen, so ist die Abbildung $g \circ f : M \longrightarrow P$ definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (\forall\, x \in M)$$

$g \circ f$ heißt die **Hintereinanderausführung** von f und g.

(17.7) SATZ: Für Abbildungen $f : M \longrightarrow N \ , \ g : N \longrightarrow P$ und $h : P \longrightarrow Q$ gilt

$$(h \circ g) \circ f \ = \ h \circ (g \circ f)$$

d.h. es gilt das **Assoziativ–Gesetz** für die Hintereinanderausführung von Abbildungen.

(17.8) DEF: Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung.

a) f heißt **injektiv**, wenn jedes Element aus N höchstens ein Urbild unter f in M besitzt.

b) f heißt **surjektiv**, wenn jedes Element aus N mindestens ein Urbild unter f in M besitzt.

c) f heißt **bijektiv**, wenn jedes Element aus N genau ein Urbild unter f in M besitzt.

Wir schreiben diese Eigenschaften einmal formal auf:

(17.9) BEM: Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung.

a) f injektiv $\iff$ $(\forall x_1 \in M \, \forall x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$
$\iff$ $(\forall x_1 \in M \, \forall x_2 \in M : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$

b) f surjektiv $\iff$ $(\forall y \in N \, \exists x \in M : y = f(x))$
$\iff$ $\mathrm{Bild}(f) = N$.

c) f bijektiv $\iff$ f injektiv **und** surjektiv

(17.10) Beispiele: **a)** $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n) := n + 1$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

b) $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $g(n) := \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ n - 1 & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

c) $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $h(z) := z + 1$ ist bijektiv.

d) $k : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $k(z) := 0$ ist weder injektiv noch surjektiv.

(17.11) LEMMA: $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ seien Abbildungen. Dann gilt:

a) Sind f und g beide injektiv (surjektiv bzw. bijektiv), so ist $g \circ f$ injektiv (surjektiv bzw. bijektiv).

b) Ist $g \circ f$ injektiv (surjektiv), so ist f injektiv (g surjektiv).

c) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.

(17.12) SATZ: Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) f ist bijektiv

b) Es existiert eine Abbildung $g : N \longrightarrow M$ mit den Eigenschaften $g \circ f = id_M$ und $f \circ g = id_N$.

(17.13) BEM: Ist f bijektiv, so ist die Abbildung g aus b) eindeutig bestimmt und selbst wieder bijektiv. g heißt **Umkehrabbildung** von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Achtung: Nur eine bijektive Abbildung besitzt eine Umkehrabbildung. Die Bezeichnung f^{-1} macht erst dann Sinn, wenn klar ist, daß f bijektiv ist.

(17.14) SATZ: $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ seien Abbildungen. Dann gilt:

a) f bijektiv $\implies$ f^{-1} bijektiv und $(f^{-1})^{-1} = f$.

b) Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv, und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(17.15) SATZ: Sei M eine nichtleere Menge und $\mathcal{A} := \mathcal{A}(M, M)$ die Menge aller Abbildungen von M in M. Dann gilt:

a) Die Hintereinanderausführung ist eine assoziative Verknüpfung auf $\mathcal{A}$ mit $\mathbf{id}_M$ als neutralem Element.

b) $f \in \mathcal{A}$ ist genau dann invertierbar bzgl. $\circ$, wenn f bijektiv ist.

c) Die Menge der bijektiven Abbildungen von M auf M bildet bzgl. $\circ$ eine Gruppe. Diese Gruppe heißt die **symmetrische Gruppe von M** und wird mit $(S_M, \circ)$ bezeichnet.

d) $(S_M, \circ)$ ist genau dann eine abelsche Gruppe, wenn M höchstens zwei Elemente enthält.

(17.15a) BEM: Im Falle $M = \{1, 2, 3 \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ schreibt man auch S_n für S_M. Es ist also

$$S_n = \{\pi \mid \pi : \{1, 2, 3 \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, 3 \ldots, n\} \text{ bijektive Abbildung}\}$$

Ein $\pi \in S_n$ läßt sich als **Permutation** der Zahlen $1, 2, 3 \ldots, n$ auffassen. Insbesondere ist $(S_n, \circ)$ eine Gruppe, die sog. **symmetrische Gruppe von n Zahlen**. Es gibt $n!$ Permutationen von n Zahlen. Für $\pi \in S_n$ schreibt man anschaulich

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

(17.16) DEF: M und N seien nichtleere Mengen.

a) M heißt **gleichmächtig** zu N (in Zeichen: $M \sim N$), wenn es eine bijektive Abbildung $M \longrightarrow N$ gibt.

b) M heißt **endlich**, wenn es ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt mit $M \sim \{1, 2, 3, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$. Die Zahl n wird dann die **Anzahl der Elemente von M** genannt. Bezeichnung: $n =: |M|$.

c) Die leere Menge ist endlich mit $|\emptyset| := 0$.

d) Ist M nicht endlich, so heißt M **unendlich** ($|M| := \infty$).

(17.17) Beispiele: a) $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{3, 9, 12, \ldots, 24\}$ sind endliche Mengen.

b) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind unendliche Mengen.

c) $\{2, 4, 6, 8, 10\} \sim \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \not\sim \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \sim \mathbb{C}$

Wir führen nun lineare Abbildungen als "strukturverträgliche" Abbildungen zwischen Vektorräumen ein.

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathrm{M}_{\boldsymbol{m,n}}(\boldsymbol{K})$ eine beliebige Matrix. Wir definieren eine Abbildung

$$\boldsymbol{f_A : K^n \longrightarrow K^m} \quad , \quad \boldsymbol{f_A(v) := Av} \quad (\forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K^n})$$

Nach (9.7) gilt dann

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f_A(v+v')} &= \boldsymbol{f_A(v) + f_A(v')} \quad (\forall\, \boldsymbol{v, v'} \in \boldsymbol{K^n}) \\ \boldsymbol{f_A(\alpha v)} &= \boldsymbol{\alpha f_A(v)} \quad (\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{K}\,,\ \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K^n}) \end{aligned}$$

Wir nehmen dies als Anlass für die folgende Definition:

(17.18) DEF: $\boldsymbol{K}$ sei ein beliebiger Körper. $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ seien Vektorräume über $\boldsymbol{K}$. Eine Abbildung $\boldsymbol{f : V \longrightarrow W}$ heißt **$\boldsymbol{K}$–linear** (oder kurz **linear** oder auch **$\boldsymbol{K}$–Homomorphismus**), wenn gilt:

L₁) $\boldsymbol{f(v+v')} = \boldsymbol{f(v) + f(v')} \quad (\forall\, \boldsymbol{v, v'} \in \boldsymbol{V})$

L₂) $\boldsymbol{f(\alpha\, v)} = \boldsymbol{\alpha\, f(v)} \quad (\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{K}\,,\ \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V})$.

Die Menge aller $\boldsymbol{K}$–linearen Abbildungen von $\boldsymbol{V}$ nach $\boldsymbol{W}$ wird mit $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{(V, W)}$ bezeichnet.

(17.19) Beispiele: **a)** Jede Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathrm{M}_{\boldsymbol{m,n}}(\boldsymbol{K})$ definiert durch die Vorschrift

$$\boldsymbol{f_A(v) := Av} \quad (\forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K^n})$$

eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung $\boldsymbol{f_A : K^n \longrightarrow K^m}$.

b) Ist $\boldsymbol{V}$ ein $\boldsymbol{K}$–Vektorraum, so ist die Identität $\mathbf{id}_{\boldsymbol{V}} : \boldsymbol{V \longrightarrow V}$ eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung.

c) Sind $\boldsymbol{V, W}$ $\boldsymbol{K}$–Vektorräume, so ist die Nullabbildung $\boldsymbol{o : V \longrightarrow W}\ ,\ \boldsymbol{v \longmapsto o_W}$, eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung.

(17.20) SATZ: **Eigenschaften linearer Abbildungen**

$\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ seien $\boldsymbol{K}$–Vektorräume über einem beliebigen Körper $\boldsymbol{K}$. Für eine $\boldsymbol{K}$–lineare Abbildung $\boldsymbol{f : V \longrightarrow W}$ gilt:

a) $\boldsymbol{f(o_V) = o_W}$

b) $\boldsymbol{f(-v) = -f(v)}$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$

c) $\boldsymbol{f(v - v') = f(v) - f(v')}$ für alle $\boldsymbol{v, v'} \in \boldsymbol{V}$

d) $\boldsymbol{f(av + a'v') = af(v) + a'f(v')}$ für alle $\boldsymbol{a, a'} \in \boldsymbol{K}, \boldsymbol{v, v'} \in \boldsymbol{V}$

e) $\boldsymbol{f}\left(\sum\limits_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_i v_i}\right) = \sum\limits_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_i f(v_i)} \quad (\forall\, \boldsymbol{a_i} \in \boldsymbol{K}, \boldsymbol{v_i} \in \boldsymbol{V})$.