Einschub C : Das Vorzeichen einer Permutation

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne S_n die Menge aller Permutationen der n Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Genaugenommen ist $S_n = \mathrm{Bij}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n)$ mit $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \ldots, n\}$.

(C.1) DEF: Sei $\pi \in S_n$. Ein Zahlenpaar $(i, k) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ heißt eine **Inversion** (oder ein **Fehlstand) von** π, wenn

$$i < k \quad \text{und} \quad \pi(i) > \pi(k)$$

gilt. Es bezeichne $\boldsymbol{\nu(\pi)}$ die Anzahl der Inversionen von π.

Beispiel: Inversionen von $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$ sind die Paare $(1, 4), (2, 4), (3, 4), (3, 5)$, d.h. $\nu(\pi) = 4$.

(C.2) LEMMA: Sei $\pi \in S_n$. Dann ist $\nu(\pi)$ die minimale Anzahl der Nachbarschaftsvertauschungen, die erforderlich sind, um aus der Folge $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$ die natürliche Reihenfolge $1, 2, \ldots, n$ herzustellen.

(C.3) DEF: Das **Vorzeichen** $\mathrm{sign}(\pi)$ einer Permutation $\pi \in S_n$ ist definiert durch

$$\boldsymbol{\mathrm{sign}(\pi) \ := \ (-1)^{\nu(\pi)}}$$

(C.4) SATZ: $f : V^n \longrightarrow K$ sei eine schiefsymmetrische Abbildung und $\pi \in S_n$. Dann gilt für jedes $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$

$$f(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(n)}) \ = \ \mathrm{sign}(\pi) \cdot f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Bew: (Idee) Durch $\nu(\pi)$ Nachbarvertauschungen läßt sich aus $v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(n)}$ die natürliche Reihenfolge $v_1, v_2, \ldots, v_n$ herstellen. Bei jeder Vertauschung ändert sich das Vorzeichen des Bildes unter f, da f nach Voraussetzung schiefsymmetrisch ist. Damit gilt

$$f(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(n)}) \ = \ (-1)^{\nu(\pi)} \ = \ \mathrm{sign}(\pi) \cdot f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

(C.5) FOLG: Für $\pi, \rho \in S_n$ gilt: $\quad \mathrm{sign}(\pi \circ \rho) \ = \ \mathrm{sign}(\pi) \cdot \mathrm{sign}(\rho)$.

Bew: Sei $d : V^n \longrightarrow K$ die eindeutig bestimmte Determinantenform auf $V := K^n$ mit $d(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Dann ist

$$\underline{\underline{d(e_{(\pi\circ\rho)(1)}, \ldots, e_{(\pi\circ\rho)(n)})}} \ = \ \mathrm{sign}(\pi \circ \rho) \cdot \underbrace{d(e_1, \ldots, e_n)}_{=1} \ = \ \underline{\underline{\mathrm{sign}(\pi \circ \rho)}}$$

Auf der anderen Seite ist

$$\underline{\underline{d(e_{(\pi\circ\rho)(1)},\ldots,e_{(\pi\circ\rho)(n)})}} \;=\; d(e_{\pi(\rho(1))},\ldots,e_{\pi(\rho(n))}) \;=\; d(e'_{\rho(1)},\ldots,e'_{\rho(n)})$$

wenn man $e_{\pi(k)} =: e'_k$ setzt. Man erhält weiter

$$d(e'_{\rho(1)},\ldots,e'_{\rho(n)}) \;=\; \operatorname{sign}(\rho)\cdot d(e'_1,\ldots,e'_n) \;=\; \operatorname{sign}(\rho)\cdot d(e_{\pi(1)},\ldots,e_{\pi(n)}) \;=$$
$$\operatorname{sign}(\rho)\cdot\operatorname{sign}(\pi)\cdot \underbrace{d(e_1,\ldots,e_n)}_{=1} \;=\; \underline{\underline{\operatorname{sign}(\rho)\cdot\operatorname{sign}(\pi)}}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(C.6) DEF: Sei $n \geq 2$. Eine Permutation $\tau \in S_n$ heißt **Transposition**, wenn es $i, k \in \mathbb{N}_n$ mit $i \neq k$ gibt , so daß gilt: $\tau(i) = k\ ,\ \tau(k) = i\ ,\ \tau(l) = l\ \ (\forall\, l \in \mathbb{N}_n \setminus \{i, k\})$.

Eine Transposition τ vertauscht also genau 2 Zahlen aus $\mathbb{N}_n$ und läßt den Rest unverändert. Außerdem gilt $\tau \circ \tau = \mathrm{id}$, d.h. $\tau^{-1} = \tau$.

(C.7) SATZ: Jede Permutation $\pi \in S_n$ $(n \geq 2)$ läßt sich als Hintereinanderausführung von höchstens n Transpositionen darstellen.

Bew: (Idee) Führe Induktion nach n .

(C.8) DEF: Eine Permutation $\pi \in S_n$ heißt **gerade**, wenn $\nu(\pi)$ eine gerade Zahl ist, ansonsten **ungerade**. Mit A_n wird die Menge aller geraden Permutationen aus S_n bezeichnet.

BEISPIEL: Eine Transposition ist immer ungerade.

(C.9) SATZ: Eine Permutation $\pi \in S_n$ ist genau dann gerade, wenn sich π als Hintereinanderausführung einer geraden Anzahl von Transpositionen darstellen läßt .

(C.10) SATZ: **a)** A_n ist eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$.

b) Für $n \geq 2$ gilt $|A_n| = \dfrac{1}{2}\cdot n!$.

(C.11) DEF: $(A_n, \circ)$ heißt **alternierende Gruppe von n Elementen**