Einschub B) Lineare Gleichungssysteme

Wir wollen hier LGS'e einmal in der Sprache von linearen Abbildungen beschreiben. Damit vereinfachen sich frühere Überlegungen, und die Resultate ergeben sich in natürlicher Weise.

Vorgelegt sei das LGS

$$(\star) \quad A \cdot x = b$$

mit der Koeffizientenmatrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und dem Vektor $b \in K^m$ der rechten Seite. Ein (bekanntes) Kriterium für die Lösbarkeit von $(\star)$ gibt das folgende Lemma:

(B.1) LEMMA: $Ax = b$ lösbar $\iff$ $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A, b)$

Bew: Sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ die Matrix mit den Spalten $a_1, \ldots, a_n \in K^m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
Ax = b \quad \text{lösbar} &\iff b \in \mathcal{L}_K(a_1, \ldots, a_n) \\
&\iff \mathcal{L}_K(a_1, \ldots, a_n) = \mathcal{L}_K(a_1, \ldots, a_n, b) \\
&\iff \dim_K(\mathcal{L}_K(a_1, \ldots, a_n)) = \dim_K(\mathcal{L}_K(a_1, \ldots, a_n, b)) \\
&\qquad (\text{da } \mathcal{L}_K(a_1, \ldots, a_n) \text{ UVR von } \mathcal{L}_K(a_1, \ldots, a_n, b) \text{ ist}) \\
&\iff \operatorname{rg}_s(A) = \operatorname{rg}_s(A, b) \\
&\iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A, b)
\end{aligned}$$

□

Die Koeffizientenmatrix A definiert die lineare Abbildung

$$f_A : K^n \longrightarrow K^m \quad , \quad v \longmapsto A \cdot v$$

Nun gilt für $v \in K^n$: $v \in \text{Lös}(A, b) \iff A \cdot v = b \iff f_A(v) = b \iff v \in f_A^{-1}(\{b\})$, d.h.

$$\text{Lös}(A, b) = f_A^{-1}(\{b\})$$

Insbesondere gilt $\text{Lös}(A, o_m) = f_A^{-1}(\{o_m\}) = \text{Kern}(f_A)$

Damit ist also die Lösungsmenge eines homogenen LGS's als Kern einer linearen Abbildung ein Unterraum von K^n, für dessen Dimension sich nach dem Rangsatz

$$\dim_K(\text{Lös}(A, o_m)) = \dim_K(\text{Kern}(f_A)) = n - \operatorname{rg}_K(f_A) = n - \operatorname{rg}(A)$$

ergibt. Ist $v_0 \in \text{Lös}(A, b)$ eine spezielle Lösung von $(\star)$, so gilt

$$\text{Lös}(A, b) = f_A^{-1}(\{b\}) = v_0 + \text{Kern}(f_A) = v_0 + \text{Lös}(A, o_m)$$

Ist $\operatorname{rg}(A) = r$, so gilt $\dim_K(\text{Lös}(A, o_m)) = n - r$, und $\text{Lös}(A, o_m)$ besitzt eine Basis $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}\}$ aus $n - r$ Lösungsvektoren aus $\text{Lös}(A, o_m)$. Damit läßt sich jede Lösung v von $(\star)$ darstellen in der Form

$$v = v_0 + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-r} v_{n-r}$$

mit Koeffizienten $\alpha_i \in K$.

Zusammenfassend erhalten wir die folgenden Ergebnisse, denen wir schon in §10 begegnet sind:

(B.2) SATZ: Seien $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ eine Matrix vom Range r und $b \in K^m$. Für das LGS

$$A \cdot x \ = \ b$$

gilt:

a) Die Lösungsmenge $L_0 = \text{Lös}(A, o_m)$ des zugehörigen homogenen LGS's

$$A \cdot x \ = \ o_m$$

ist ein Untervektorraum von K^n, der die Dimension $n - r$ hat.

b) Ist das LGS $A \cdot x = b$ lösbar und ist $v_o \in L := \text{Lös}(A, b)$ eine spezielle Lösung und ist $\{ v_1, \ldots, v_{n-r} \}$ eine Basis von L_0, so gilt

$$L = v_0 + L_0 = \{ v_0 + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in K \}$$

Die folgenden Aussagen ergeben sich sofort:

(B.3) SATZ: Seien $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$. Dann gilt für das LGS $(\star)$ $A \cdot x = b$:

a) $(\star)$ ist für jedes $b \in K^m$ lösbar $\iff$ f_A ist surjektiv $\iff$ $\mathrm{rg}(A) = m$

b) $A \cdot x = o_m$ besitzt genau eine Lösung $\iff$ f_A ist injektiv $\iff$ $\mathrm{rg}(A) = n$

c) Ist $(\star)$ lösbar, so gilt: $(\star)$ eindeutig lösbar $\iff$ $\mathrm{rg}(A) = n$.

(B.4) FOLG: Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Dann ist das LGS

$$(\star) \quad A \cdot x = b$$

für jedes $b \in K^n$ eindeutig lösbar.

Zusatz: $A^{-1} \cdot b$ ist die eindeutig bestimmte Lösung.

Bew: Die erste Behauptung ergibt sich sofort aus (B.3). Wir wollen hier aber noch einen direkten Beweis geben, der nur die Invertierbarkeit der Koeffizientenmatrix benutzt:

Existenz:

Für $v := A^{-1}b \in K^n$ gilt $Av = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = E_n b = b$, d.h. $v \in \text{Lös}(A, b)$.

Eindeutigkeit:

Sind $v, v' \in K^n$ Lösungen von $(\star)$, so folgt $Av = b = Av'$, also $Av = Av'$. Linksmultiplikation mit A^{-1} ergibt $v = v'$. $\square$

Alternativer Beweis von (B.4):

Da A invertierbar ist, ist $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ ein Isomorphismus. Daher besitzt $b \in K^n$ genau ein Urbild unter f_A und das LGS $(\star)$ daher genau eine Lösung, nämlich

$$f_A^{-1}(b) \;=\; A^{-1} \cdot b\,.$$

Beim Entzerrungsalgorithmus muß die erweiterte Koeffizientenmatrix (A, b) eines LGS's $Ax = b$ auf Treppenform gebracht werden. Dies geschieht mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen, die einer Linksmultiplikation mit Elementarmatrizen entsprechen. Daß dabei die Lösungsmenge nicht verändert wird, zeigt der folgende (schon bekannte, aber jetzt einfacher zu beweisende) Satz:

(B.5) SATZ: Seien $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $b \in K^m$.

a) Für jede invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ haben die beiden linearen Gleichungssysteme

$$(\star) \quad A \cdot x = b \qquad \text{und} \qquad (\star\star) \quad (P \cdot A) \cdot x = P \cdot b$$

dieselbe Lösungsmenge.

b) Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $(\star)$ $A \cdot x = b$ ändert sich nicht bei elementaren Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix (A, b).

Bew: **a)** $\mathrm{Lös}(A, b) \subseteq \mathrm{Lös}(PA, Pb)$ ist klar. Für den Nachweis der umgekehrten Inklusion multipliziere $(\star\star)$ von links mit P^{-1}.

b) Die Ausführung einer elementaren Zeilenumformung auf (A, b) entspricht einer Linksmultiplikation von $(\star)$ mit einer Elementarmatrix $G \in \mathrm{GL}_m(K)$. Nach a) ändert sich dabei nicht die Lösungsmenge. $\square$