# Musterlösung für Aufgabe 26

**26. Aufgabe:** $V$ und $W$ seien endlichdimensionale $K$–Vektorräume.

**a)** $f : V \longrightarrow W$ sei ein $K$–Monomorphismus. Beweise, daß es einen $K$–Epimorphismus $g : W \longrightarrow V$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$ . (**Hinweis:** Lineare Fortsetzung)

**b)** $f : V \longrightarrow W$ sei ein $K$–Epimorphismus. Beweise, daß es einen $K$–Monomorphismus $h : W \longrightarrow V$ gibt mit $f \circ h = \mathrm{id}_W$ .

**Lösung:**

**a)** Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $V$. Da $f$ ein Monomorphismus ist, ist $f(B) = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ nach (17.30a) linear unabhängig. Ergänze $f(B)$ zu einer Basis

$$C = \{\underbrace{f(v_1)}_{=:w_1}, \ldots, \underbrace{f(v_n)}_{=:w_n}, w_{n+1}, \ldots, w_m\}$$

von $W$ . Definiere $g : W \longrightarrow V$ durch lineare Fortsetzung auf der Basis $C$ von $W$ durch

$$g(w_i) := \begin{cases} v_i & \text{für } i = 1, 2, \ldots, n \quad (f(v_i) = w_i) \\ o_W & \text{für } i = n+1, \ldots, m \end{cases}$$

Dadurch ist eine $K$–lineare Abbildung $g : W \longrightarrow V$ erklärt. Es folgt

$$(g \circ f)(v_i) = g(f(v_i)) = g(w_i) = v_i = \mathrm{id}_V(v_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Damit gilt $(g \circ f)|B = \mathrm{id}_V|B$ , woraus sich mit (17.32) $\boxed{g \circ f = \mathrm{id}_V}$ ergibt. Nach (17.11c) ist $g$ ein Epimorphismus.

**b)** Sei $D = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von $W$. Da $f$ ein Epimorphismus ist, besitzt jedes $w_i$ mindestens ein Urbild unter $f$. Wähle zu jedem $w_i$ genau ein $v_i \in V$ mit $f(v_i) = w_i$ . Definiere durch lineare Fortsetzung eine $K$–lineare Abbildung $h : W \longrightarrow V$ mit $h(w_i) = v_i$ $(i = 1, \ldots, m)$

$$(f \circ h)(w_i) = f(h(w_i)) = f(v_i) = w_i = \mathrm{id}_V(w_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Damit gilt $(f \circ h)|D = \mathrm{id}_W|D$ , woraus sich mit (17.32) $\boxed{f \circ h = \mathrm{id}_W}$ ergibt. Nach (17.11c) ist $h$ ein Monomorphismus.