14. (und letztes) Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Musterlösung

64. Aufgabe: Seien $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Rechne nach: $M^2 = M$ und $N^3 = O$, d.h. M ist idempotent und N ist nilpotent.

b) Rechne nach: $p_M = \det(M - TE_3) = -T^3 + 2T^2 - T$ und $p_N = \det(N - TE_3) = -T^3$.

c) $p_M = (-T)(T-1)^2$ und $p_N = (-T)^3$ zerfallen beide in Linearfaktoren, M und N sind also trigonalsierbar. 0 ist einfacher EW von M, seine geometrische Vielfachheit ist nach (22.5) dann auch 1. 1 ist ein doppelter EW von M, für seine geometrische Vielfachheit gilt $\dim_{\mathbf{R}}(\mathrm{Eig}(M,1)) = 3 - \mathrm{rg}(M - 1 \cdot E_3) = 3 - 1 = 2$. Nach (22.6) ist M diagonalisierbar.
0 ist dreifacher EW von N, seine geometrische Vielfachheit ist $\dim_{\mathbf{R}}(\mathrm{Eig}(N,0)) = 3 - \mathrm{rg}(N) = 3 - 2 = 1$. Damit ist N nach (22.6) **nicht** diagonalisierbar.

d) Die Determinante ist gleich dem konstanten Glied des charakteristischen Polynoms, in beiden Fällen also 0 .

e) Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom oder dieselbe Spur. Beides ist nicht erfüllt, M ist also **nicht** ähnlich zu N .

65. Aufgabe: Sei $G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta - \alpha & \gamma - \beta \\ 0 & \beta & \gamma - \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in K^\star \right\} \subseteq \mathrm{M}_3(K)$

a) Rechne nach: $A, B \in G \implies A \cdot B \in G$ ($A \cdot B$ hat die Gestalt der Matizen aus G, und in der Hauptdiagonale sind die Elemente $\neq 0$) .
Die Matrizenmultiplikation ist bekanntermaßen assoziativ.
Es gilt $E_3 \in G$ und E_3 ist neutral bzgl. der Matrizenmultiplikation.
Für $A \in G$ gilt $\det(A) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$, d.h. A ist invertierbar, und es ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & \beta^{-1} - \alpha^{-1} & \gamma^{-1} - \beta^{-1} \\ 0 & \beta^{-1} & \gamma^{-1} - \beta^{-1} \\ 0 & 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \in G .$$

Rechne nach: $A \cdot B = B \cdot A$ für alle $A, B \in G$.
Fazit: $(G, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.
Man kann G auch als Untergruppe von $(\mathrm{GL}_3(K), \cdot)$ auffassen.

b) Sei $S := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(K)$. Dann ist $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, und es gilt

$$S \cdot M \cdot S^{-1} \;=\; \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{für alle} \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta - \alpha & \gamma - \beta \\ 0 & \beta & \gamma - \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \in G .$$

c) Sei $G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma-\alpha \\ 0 & \alpha & \gamma-\alpha \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \gamma \in K^\star \right\} \subseteq G$.

Rechne nach: $A, B \in G_1 \implies A \cdot B \in G_1$. Es gilt $E_3 \in G_1$. Für $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma-\alpha \\ 0 & \alpha & \gamma-\alpha \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \in G_1$ gilt $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & \gamma^{-1}-\alpha^{-1} \\ 0 & \alpha^{-1} & \gamma^{-1}-\alpha^{-1} \\ 0 & 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \in G_1$.

Damit ist G_1 eine Untergruppe von $(G, \cdot)$.

Mit der Matrix S aus b) gilt $S \cdot M \cdot S^{-1} = \operatorname{diag}(\alpha, \alpha, \gamma)$ für alle $M \in G_1$.

***66. Aufgabe:** Sei $M := E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ und $f := f_M : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung mit M als Darstellungsmatrix. f ist nilpotent mit $f^4 = o$ und $f^k \neq o$ für $k = 0, 1, 2, 3$.

c) Wir beweisen sofort die folgende naheliegende Verallgemeinerung von a) und b):

Sei $\dim_K(V) = n \geq 1$. $f \in \operatorname{End}_K(V)$ sei nilpotent mit $f^n = o$ und $f^{n-1} \neq o$. Dann gilt:

i) $\operatorname{Kern}(f^k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ sind alle f–invarianten Untervektorräume von V.

ii) V ist unzerlegbar bzgl. f.

i) Sei $U_k := \operatorname{Kern}(f^k)$. Wir zeigen zuerst, daß U_k f–invariant ist, d.h. $f(U_k) \subseteq U_k$.

Sei $v \in U_K = \operatorname{Kern}(f^k)$. Dann gilt $f^k(v) = o_V$. Es folgt

$$f^k(f(v) \;=\; f^{k+1}(v) \;=\; f(f^k(v)) \;=\; f(o_V) \;=\; o_V,$$

d.h. $f(v) \in U_k$. Nach (23.4a) gilt

$$(\star) \quad O = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_{n-1} \subseteq U_n = V$$

Wir wollen zeigen, daß in $(\star)$ alle Inklusionen echt sind. **Annahme:** $U_i = U_{i+1}$ für ein $i < n$. Dann ergibt sich wie im Beweis von (23.4b)

$$O = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_i = U_{i+1} = \ldots = U_n = V$$

Aus $U_i = V$ folgt $f^i = o$ für $i < n$, im **Widerspruch** zur Voraussetzung $f^{n-1} \neq o$. Also

$$O = U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_{n-1} \subset U_n = V$$

Wegen $\dim_K(V) = n$ folgt hieraus $\dim_K(U_k) = k$ für alle $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Sei nun U ein beliebiger f–invarianter Unterraum von V. U habe die Dimension k.

Beh.: $U = U_k$.

Wegen $f(U) \subseteq U$ definiert f durch Einschränkung einen K–Endomorphismus

$$g : U \longrightarrow U \quad , \quad u \longmapsto f(u)$$

Wegen $f^n = o$ folgt auch $g^n = o$. Nach (23.4a) gilt

$$(\star\star) \quad U \supseteq g(U) \supseteq g^2(U) \supseteq \ldots \supseteq g^k(U)$$

Annahme: $g^k(U) \neq O$. Dann sind in $(\star\star)$ alle Inklusionen echt. Würde nämlch $g^{i-1}(U) = g^i(U)$ für ein $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ gelten, so würde $g^j(U) = g^{i-1}(U)$ für alle $j \geq i-1$ folgen, also $O = g^n(U) = g^k(U) \neq O$. Widerspruch! Also

$$U \supset g(U) \supset g^2(U) \supset \ldots \supset g^k(U) \neq O$$

Hieraus folgt $\dim_K(U_k) \geq k+1$ im **Widerspruch** zu $\dim_K(U_k) = k$.

Folglich gilt $g^k(U) = O$, woraus sich

$$U \subseteq \mathrm{Kern}(g^k) \subseteq \mathrm{Kern}(f^k) \;=\; U_k$$

ergibt. Aus Dimensionsgründen folgt $U \;=\; U_k$.

ii) Gelte $V \;=\; V_1 \oplus V_2$ mit f–invarianten Untervektorräumen V_1 und V_2 von V.

Es ist zu zeigen: $V_1 = O$ oder $V_2 = O$

Nach **i)** gibt es $k, l \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ mit $V_1 = U_k$ und $V_2 = U_l$. Gelte o.B.d.A. $k \leq l$. Dann folgt $U_k \subseteq U_l$, d.h. $V_1 \subseteq V_2$. Hieraus ergibt sich

$$O \;=\; V_1 \cap V_2 = V_1 .$$

Damit ist V unzerlegbar bzgl. f.