13. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Musterlösung Aufgabe 63

63. Aufgabe: a) Gelte $f^m = o$, und sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f. Dann existiert ein Vektor $v \in V \setminus \{o_V\}$ mit $f(v) = \lambda v$. Daraus folgt $f^l(v) = \lambda^l v$ für alle $l \in \mathbb{N}$ (s. Beweis von Aufgabe 54). Also

$$o_V = f^m(v) = \lambda^m v \quad \overset{v \neq o}{\Longrightarrow} \quad \lambda^m = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0$$

b) Seien $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} \in K$ beliebig mit

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^i(v) \;=\; o_V$$

Zu zeigen: $\alpha_i = 0 \;\; \forall\, i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Aus $f^m = o$ folgt $f^k = o \;\; \forall\, k \geq m$. Wende f^{m-1} auf (1) an:

$$o_V \;=\; f^{m-1}\left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^i(v)\right) \;=\; \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^{m-1+i}(v) \;=\; \alpha_0 \underbrace{f^{m-1}(v)}_{\neq o} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\alpha_0 = 0}$$

Folglich

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i f^i(v) \;=\; o_V$$

Wende f^{m-2} auf (2) an:

$$o_V \;=\; f^{m-2}\left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i f^i(v)\right) \;=\; \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i f^{m-2+i}(v) \;=\; \alpha_1 \underbrace{f^{m-1}(v)}_{\neq o} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\alpha_1 = 0}$$

So fortfahrend erhält man schließlich, daß alle α_i gleich 0 sind.

c) **<u>i) $\Longrightarrow$ ii)</u>**

Für $f = o$ ist nichts zu beweisen. Sei daher $f \neq o$, und gelte $f^m = o$ und $f^{m-1} \neq o$ für ein $m \geq 1$. Aus b) folgt $m \leq \dim_K(V) = n$. Setze

$$V_i := \mathrm{Bild}(f^{m-i}) \quad (i = 0, 1, \ldots, m)$$

Dann ist V_i ein Untervektorraum von V, insbesondere gilt $V_0 = \mathrm{Bild}(f^m) = O$ und $V_m = \mathrm{Bild}(f^0) = \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_V) = V$. Man zeigt leicht:

1) $V_i \subset V_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1)$ und

2) $f(V_i) \subseteq V_{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$.

Sei $B_1 := \{v_1, \ldots, v_k\}$ eine Basis von V_1. Bilde $U_j := \mathcal{L}_K(v_1, \ldots, v_j) \;\; (1 \leq j \leq k)$. Dann ist U_j ein j–dimensionaler Unterraum, und es gilt

$$O = V_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_{k-1} \subset U_k = V_1$$

Wir ergänzen jetzt B_1 zu einer Basis B_2 von V_2 und setzen zwischen V_1 und V_2 Unterräume ein, deren Dimensionen sich bei jedem Schritt um 1 erhöhen. Auf diese Art "verfeinern" wir

$$O = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{m-1} \subset V_m = V$$

zu einer Fahne $(U_j)_{j=0,1,\ldots,n}$ von V.

Sei $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ beliebig. Dann existiert ein $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ mit

$$V_i \subset U_j \subseteq V_{i+1}\,.$$

Es folgt $\quad f(U_j) \subseteq f(V_{i+1}) \subseteq V_i \subset U_j$, d.h. die Fahne (U_j) ist f–invariant. Außerdem ergibt sich $f(U_j) \subseteq U_{j-1}$ aus $f(U_j) \subseteq V_i \subset U_j$. Damit ist alles gezeigt.

ii) $\Longrightarrow$ iii)

Mit Hilfe des Basisergänzungssatzes läßt sich eine Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ von V konstruieren, so daß

$$U_i \;=\; \mathcal{L}_K(v_1, \ldots, v_i)$$

gilt. Wegen $f(U_i) \subseteq U_{i-1}$ ergibt sich

$f(v_1) \in U_0 = O \quad \Longrightarrow \quad f(v_1) = o_V$

$f(v_i) \in U_{i-1} \quad \Longrightarrow \quad f(v_i) = a_{1i}v_1 + \ldots + a_{i-1,i}v_{i-1} \quad (i \geq 2)$

Damit ist

$$\mathrm{M}_B^B(f) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & & \\ \vdots & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikt obere Dreicksmatrix.

iii) $\Longrightarrow$ i)

Sei $M := \mathrm{M}_B^B(f)$ eine strikt obere Dreiecksmatrix. Dann gilt $M^n = O$ (Beweis?), und es folgt

$$O \;=\; M^n \;=\; \left(\mathrm{M}_B^B(f)\right)^n \;=\; \mathrm{M}_B^B(f^n) \quad\Longrightarrow\quad f^n = o$$

Also ist f nilpotent.