

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)**Abgabe: Do, 16.6.2005, bis 13.00 Uhr**

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel-Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

37. Aufgabe: Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(K)$.

Bestimmen Sie den Rang von M und berechne ggfs. die inverse Matrix für den Fall

a) $K = \mathbb{Q}$ b) $K = \mathbb{Z}_3$. (3)

38. Aufgabe: $Sp : M_n(K) \rightarrow K$ sei die durch lineare Fortsetzung definierte K -lineare Abbildung mit $Sp(E_{ik}) = \delta_{ik}$ ($\forall i, k = 1, 2, \dots, n$) (dabei ist $\{E_{ik} | i, k = 1, 2, \dots, n\}$ die Menge aller Basismatrizen in $M_n(K)$).

a) Berechnen Sie $Sp(M)$ für $M = (a_{ik}) \in M_n(K)$ b) Beweisen Sie, daß Sp ein K -Epimorphismus ist, und bestimmen Sie die Dimension von $\text{Kern}(Sp)$ c) Beweisen Sie: $Sp(M \cdot N) = Sp(N \cdot M)$ ($\forall M, N \in M_n(K)$)

d) Seien $M, N \in M_n(K)$. Beweisen Sie: $M \approx N \implies Sp(M) = Sp(N)$. (5)

39. Aufgabe: Sei $M = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 16 & 18 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R})$. Berechnen Sie invertierbare

Matrizen $P \in GL_4(\mathbb{R})$ und $Q \in GL_5(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$P \cdot M \cdot Q = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

wobei r der Rang von M ist. Machen Sie die Probe! (**Hinweis:** Der Beweis von (18.21) und die Berechnungsmethode (A.8) für die inverse Matrix könnten hilfreich sein!) (3)

40. Aufgabe: Sei \mathcal{D} der \mathbb{R} -Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Die Funktionen $f_i \in \mathcal{D}$ seien definiert durch $f_1(x) = e^{2x}$, $f_2(x) = xe^{2x}$, $f_3(x) = x^2e^{2x}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$). Es sei $B := \{f_1, f_2, f_3\}$ und $U := \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(B)$. Ferner sei $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, $f \mapsto f'$, die Abbildung, die jedem $f \in \mathcal{D}$ die Ableitung f' zuordnet. Beweise:

- a) D ist \mathbb{R} -linear
- b) $D(U) \subseteq U$ (damit definiert D eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $d : U \rightarrow U$)
- c) B ist eine Basis von U
- d) Bestimme die Darstellungsmatrix $M_B^B(d)$
- e) Untersuche, ob D und d Isomorphismen sind. (5)

***41. Aufgabe:** Unter einem endlichen Kettenkomplex versteht man eine Folge $(d_i)_{i=0,1,\dots,n+1}$ von K -linearen Abbildungen $d_i : V_i \rightarrow V_{i-1}$ zwischen endlich dimensionalen K -Vektorräumen V_i , wobei $V_{n+1} = V_{-1} = O$ sein soll, für die gilt: $d_i \circ d_{i+1} = o$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

$$O \xrightarrow{d_{n+1}} V_n \xrightarrow{d_n} V_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_2} V_1 \xrightarrow{d_1} V_0 \xrightarrow{d_0} O$$

Beweise:

- a) $\text{Bild}(d_{i+1}) \subseteq \text{Kern}(d_i)$ ($\forall i = 0, 1, \dots, n$)
- b) Für jedes $i = 0, 1, \dots, n$ gibt es einen Vektorraum H_i und einen Epimorphismus $h_i : \text{Kern}(d_i) \rightarrow H_i$ mit $\text{Kern}(h_i) = \text{Bild}(d_{i+1})$.
- c) $\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_K(V_i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_K(H_i)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). (4*)

Internet: <http://math-www.uni-paderborn.de/~chris>