9. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Abgabe: Do, 16.6.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

37. Aufgabe: Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(K)$.

Bestimme den Rang von M und berechne ggfs. die inverse Matrix für den Fall

a) $K = \mathbb{Q}$ **b)** $K = \mathbb{Z}_3$. (3)

38. Aufgabe: $Sp : \mathrm{M}_n(K) \longrightarrow K$ sei die durch lineare Fortsetzung definierte K–lineare Abbildung mit $Sp(E_{ik}) = \delta_{ik}$ $(\forall\, i, k = 1, 2, \ldots, n)$ (dabei ist $\{E_{ik} | i, k = 1, 2, \ldots, n\}$ die Menge aller Basismatrizen in $\mathrm{M}_n(K)$) .

a) Berechne $Sp(M)$ für $M = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$

b) Beweise, daß Sp ein K–Epimorphismus ist, und bestimme die Dimension von Kern(Sp)

c) Beweise: $Sp(M \cdot N) = Sp(N \cdot M)$ $(\forall\, M, N \in \mathrm{M}_n(K))$

d) Seien $M, N \in \mathrm{M}_n(K)$. Beweise: $M \approx N \quad \Longrightarrow \quad Sp(M) = Sp(N)$. (5)

39. Aufgabe: Sei $M = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 16 & 18 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,5}(\mathbb{R})$. Berechne invertierbare Matrizen $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ und $Q \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$P \cdot M \cdot Q = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

wobei r der Rang von M ist . Mache die Probe! (**Hinweis:** Der Beweis von (18.21) und die Berechnungsmethode (A.8) für die inverse Matrix könnten hilfreich sein!) (3)

40. Aufgabe: Sei $\mathcal{D}$ der $\mathbb{R}$–Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Die Funktionen $f_i \in \mathcal{D}$ seien definiert durch $f_1(x) = e^{2x}$, $f_2(x) = xe^{2x}$, $f_3(x) = x^2e^{2x}$ $(\forall\, x \in \mathbb{R})$. Es sei $B := \{f_1, f_2, f_3\}$ und $U := \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(B)$. Ferner sei $D : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$, $f \longmapsto f'$, die Abbildung, die jedem $f \in \mathcal{D}$ die Ableitung f' zuordnet. Beweise:

a) D ist $\mathbb{R}$–linear

b) $D(U) \subseteq U$ (damit definiert D eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $d : U \longrightarrow U$)

c) B ist eine Basis von U

d) Bestimme die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_B^B(d)$

e) Untersuche, ob D und d Isomorphismen sind. (5)

***41. Aufgabe:** Unter einem endlichen Kettenkomplex versteht man eine Folge $(d_i)_{i=0,1,\ldots,n+1}$ von K–linearen Abbildungen $d_i : V_i \longrightarrow V_{i-1}$ zwischen endlich dimensionalen K–Vektorräumen V_i, wobei $V_{n+1} = V_{-1} = O$ sein soll, für die gilt: $d_i \circ d_{i+1} = o$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

$$O \xrightarrow{d_{n+1}} V_n \xrightarrow{d_n} V_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_2} V_1 \xrightarrow{d_1} V_0 \xrightarrow{d_0} O$$

Beweise:

a) $\mathrm{Bild}(d_{i+1}) \subseteq \mathrm{Kern}(d_i)$ $(\forall\, i = 0, 1, \ldots, n)$

b) Für jedes $i = 0, 1, \ldots, n$ gibt es einen Vektorraum H_i und einen Epimorphismus $h_i : \mathrm{Kern}(d_i) \longrightarrow H_i$ mit $\mathrm{Kern}(h_i) = \mathrm{Bild}(d_{i+1})$.

c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_K(V_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_K(H_i)$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$. (4*)

Internet: http://math–www.uni–paderborn.de/˜ chris