8. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Abgabe: Do, 9.6.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

33. Aufgabe: Ein Element a eines Ringes $(R, +, \cdot)$ heißt **nilpotent**, wenn es eine natürliche Zahl $k \geq 1$ gibt mit $a^k = 0_R$. a heißt **idempotent**, wenn $a^2 = a$ gilt. Beweise:

a) Ist $a \in R$ nilpotent, so ist $1_R - a$ eine Einheit.

b) Ist $a \in R$ idempotent und Einheit, so folgt $a = 1_R$.

c) Sei V ein n–dimensionaler K–Vektorraum. Ist dann $f \in \mathrm{End}_K(V)$ nilpotent, so gilt $\mathrm{rg}_K(f^k) \leq \max(0, n-k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere folgt $f^n = o$.

d) Untersuche, ob die folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ nilpotent sind:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(x) & \cos(x) & \cos^2(x) \\ -\sin(x) & 0 & \cos(x) \\ -\sin^2(x) & \sin(x) & \sin(x)\cos(x) \end{pmatrix} , \ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(8)

34. Aufgabe: Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Finde eine Formel für M^n $(n \geq 1)$ und beweise diese.

b) Beweise, daß M invertierbar ist, und berechne M^{-1}. Mache die Probe! (4)

35. Aufgabe: Die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $f(v) := \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_2 + a_3 \\ a_3 \end{pmatrix}$ für $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Seien

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Beweise, daß B eine Basis von $\mathbb{R}^4$ und C eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimme die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_C^B(f)$ von f bezgl. B und C.

c) Bestimme den Rang von f.

d) Berechne den Bildwert $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix})$ mit Hilfe von $\mathrm{M}_C^B(f)$. (4)

***36. Aufgabe:** Es sei V ein endlichdimensionaler K–Vektorraum. Dann heißt der K–Vektorraum $V^\star := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ der zu V **duale Vektorraum**. $V^\star$ besteht aus allen Linearformen auf V .

a) Sei $B := \{ v_1, \ldots, v_n \}$ eine Basis von V . Beweise: es gibt Linearformen $f_i \in V^\star$ $(i = 1, \ldots, n)$ mit $f_i(v_k) = \delta_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, und $C := \{ f_1, \ldots, f_n\}$ ist eine Basis von $V^\star$.

b) Jede K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ definiert eine Abbildung $f^\star : W^\star \longrightarrow V^\star$, $g \longmapsto g \circ f$. Beweise, daß $f^\star$ K–linear ist. Sei $A := \mathrm{M}_B^B(f)$ die Darstellungsmatrix von f bzgl. B. Stelle die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_C^C(f^\star)$ von $f^\star$ bzgl. C in Abhängigkeit von A auf.

c) Zeige, daß es einen Isomorphismus $V \longrightarrow (V^\star)^\star$ gibt. (4*)

Internet: http://math–www.uni–paderborn.de/˜ chris