7. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Abgabe: Do, 2.6.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

28. Aufgabe: V, W, und X seien endlichdimensionale K– Vektoräume, und $f : V \longrightarrow W$ und $g : W \longrightarrow X$ seien K–lineare Abbildungen. Beweise:

a) f K–Monomorphismus $\implies$ $V \cong f(V)$

b) $\mathrm{rg}_K(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}_K(f), \mathrm{rg}_K(g))$

c) f K–Epimorphismus $\implies$ $\mathrm{rg}_K(g \circ f) = \mathrm{rg}_K(g)$

d) g K–Monomorphismus $\implies$ $\mathrm{rg}_K(g \circ f) = \mathrm{rg}_K(f)$. (4)

29. Aufgabe: V sei ein K–Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ sei eine K–lineare Abbildung mit der Eigenschaft $f \circ f = f$. Ferner seien $U := \mathrm{Kern}(f)$ und $W := \mathrm{Bild}(f)$. Beweise:

a) $\forall\, w \in W \ : \ f(w) = w$ **b)** $\forall\, v \in V \ : \ v - f(v) \in U$

c) Im Falle $f \neq \mathrm{id}_V$ ist f nicht injektiv **d)** $V = U \oplus W$. (4)

30. Aufgabe: Die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei mit Hilfe linearer Fortsetzung auf der kanonischen Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Beweise, daß f ein $\mathbb{R}$–Isomorphismus ist

b) Berechne den Bildwert von f^{-1} an der Stelle $w = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. (3)

31. Aufgabe: Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Es ist bekannt, daß $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist. Die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei mit Hilfe linearer Fortsetzung definiert durch

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, f(v_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechne $f(w)$ für $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ohne Benutzung der Darstellungsmatrix)

b) Bestimme die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}(f)$ von f

c) Berechne $f(w)$ mit Hilfe von $\mathrm{M}(f)$ (w wie in a))

d) Bestimme jeweils eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$. (5)

***32. Aufgabe:** Es sei V ein K–Vektorraum. Eine K–lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ heißt auch ein **K–Endomorphismus von V**. Mit $\mathrm{End}_K(V)$ werde die Menge aller K–Endomorphismen von V bezeichnet. Nach (17.21) ist $\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V, V)$ ein K–Vektorraum. Außerdem ist $(\mathrm{End}_K(V), +, \circ)$ ein Ring. (Man mache sich das klar! Wie steht es mit der Kommutativität?).

Gegeben seien zwei K–Endomorphismen p_1 und p_2 von V, die folgende Bedingungen erfüllen:

i) $p_1 + p_2 = \mathrm{id}_V$ **ii)** $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = o$ **iii)** $p_1 \circ p_1 = p_1$, $p_2 \circ p_2 = p_2$.

Beweise:

a) $\mathrm{Bild}(p_1) = \mathrm{Kern}(p_2)$, $\mathrm{Bild}(p_2) = \mathrm{Kern}(p_1)$

b) $V = \mathrm{Bild}(p_1) \oplus \mathrm{Bild}(p_2)$

c) Für jedes $f \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt: $f = p_1 \circ f \circ p_1 + p_1 \circ f \circ p_2 + p_2 \circ f \circ p_1 + p_2 \circ f \circ p_2$.

d) Was läßt sich über p_1 und p_2 aussagen, wenn p_1 injektiv oder surjektiv ist?

(3*)

Internet: http://math–www.uni–paderborn.de/˜chris