6. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Abgabe: Mittwoch, 25.5.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

22. Aufgabe: V, W, X seien K–Vektorräume, und $f : V \longrightarrow W$ und $g : W \longrightarrow X$ seien K–lineare Abbildungen. Beweise, daß dann auch $g \circ f : V \longrightarrow X$ eine K–lineare Abbildung ist. (2)

23. Aufgabe: Sei V ein endlich–dimensionaler K–Vektorraum und $\alpha \in K$ ein festes Element. Die Abbildung $f : V \longrightarrow V$ sei definiert durch $f(v) := \alpha\, v \quad (\forall\, v \in V)$.

a) Beweise, daß f eine K–lineare Abbildung ist.

b) Bestimme die Dimension von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$. (3)

24. Aufgabe: a) V sei ein K–Vektorraum, und $f, g : V \longrightarrow V$ seien K–lineare Abbildungen. **i)** Beweise: $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Kern}(g) \subseteq \mathrm{Kern}(f+g)$, **ii)** Untersuche, in welcher Teilmengenbeziehung $\mathrm{Bild}(f) + \mathrm{Bild}(g)$ und $\mathrm{Bild}(f+g)$ zueinander stehen. Beweis erforderlich!

b) $f : V \longrightarrow W$ und $g : W \longrightarrow X$ seien K–lineare Abbildungen. **i)** Beweise: $\mathrm{Bild}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Bild}(g)$ **ii)** Untersuche, in welcher Teilmengenbeziehung $\mathrm{Kern}(g \circ f)$ und $\mathrm{Kern}(f)$ zueinander stehen. Beweis erforderlich! (3)

25. Aufgabe: a) Finde einen Körper K, einen K–Vektorraum V und einen K–Monomorphismus $f : V \longrightarrow V$, der **kein** K–Epimorphismus ist. Natürlich mit Begründung!

b) Finde einen Körper L, einen L–Vektorraum W und einen L–Epimorphismus $g : W \longrightarrow W$, der **kein** L–Monomorphismus ist. Natürlich mit Begründung! (4)

26. Aufgabe: V und W seien endlichdimensionale K–Vektorräume.

a) $f : V \longrightarrow W$ sei ein K–Monomorphismus. Beweise, daß es einen K–Epimorphismus $g : W \longrightarrow V$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$. (**Hinweis:** Lineare Fortsetzung)

b) $f : V \longrightarrow W$ sei ein K–Epimorphismus. Beweise, daß es einen K–Monomorphismus $h : W \longrightarrow V$ gibt mit $f \circ h = \mathrm{id}_W$. (4)

***27. Aufgabe:** Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft
$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (\forall\, x, y \in \mathbb{R})$. Beweise:

a) f ist $\mathbb{Q}$–linear.

b) Ist f in einem Punkt stetig, so ist f (auf ganz $\mathbb{R}$) stetig.

c) Ist f stetig, so ist f $\mathbb{R}$–linear.

d) Ist f stetig, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f = c \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. (4*)