14. (und letztes) Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Abgabe: Mittwoch, 20.7.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

64. Aufgabe: Seien $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Untersuche, ob M oder N nilpotent bzw. idempotent ist.

b) Bestimme die charakteristischen Polynome von M und von N.

c) Untersuche, ob M oder N diagonalisierbar ist.

d) Berechne auf möglichst einfache Art die Determinanten von M und N.

e) Untersuche, ob M ähnlich zu N ist. (6)

65. Aufgabe: Sei $G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\beta \\ 0 & \beta & \gamma-\beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha,\beta,\gamma \in K^\star \right\} \subseteq \mathrm{M}_3(K)$
eine Menge von oberen Dreiecksmatrizen.

a) Beweise, daß G bzgl. der Matrizenmultiplikation eine abelsche Gruppe ist.

b) Beweise, daß es eine einzige Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so daß $S \cdot M \cdot S^{-1}$ für alle $M \in G$ eine Diagonalmatrix ist. Wie sieht diese Diagonalmatrix aus?

c) Sei $G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma-\alpha \\ 0 & \alpha & \gamma-\alpha \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha,\gamma \in K^\star \right\} \subseteq G$. Beweise, daß G_1 eine Untergruppe von $(G,\cdot)$ ist. Wie sieht die Diagonalform der Matrizen aus G_1 aus? (5)

***66. Aufgabe:** Sei $M := E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,4} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ ($E_{ik} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ ist eine Basismatrix) und $f := f_M : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ die $\mathbb{R}$–lineare Abbildung mit M als Darstellungsmatrix. Beweise

a) $\mathrm{Kern}(f^k)$ $(k = 0,1,2,3,4)$ sind alle f–invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^4$.

b) $\mathbb{R}^4$ ist unzerlegbar bzgl. f.

c) Wie läßt sich das gefundene Ergebnis verallgemeinern? (4*)

Internet: http://math–www.uni–paderborn.de/~chris

Klausurtermin: 26.7.2005, 8.30–11.30 Uhr. Anmeldung erforderlich!