12. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Abgabe: Donnerstag, 7.7.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

52. Aufgabe: Sei $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 7 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$

a) Berechne alle Eigenvektoren von M.

b) Bestimme, wenn möglich, eine Basis von $\mathbb{R}^4$, die aus Eigenvektoren von M besteht.

c) Untersuche, ob es eine Diagonalmatrix gibt, die zu M ähnlich ist. Wenn ja, gib diese Diagonalmatrix an. (5)

53. Aufgabe: Sei $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$

Bestimme alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von N. (4)

54. Aufgabe: Ist $p = \sum_{i=0}^{s} a_i T^i \in K[T]$ ein Polynom in T mit Koeffizienten aus K, so kann man in dieses Polynom an Stelle von T Elemente aus K, Matrizen aus $\mathrm{M}_n(K)$ bzw. Endomorphismen eines K–Vektorraumes V einsetzen. Genauer gilt:

$$\lambda \in K \quad \Longrightarrow \quad p(\lambda) := \sum_{i=0}^{s} a_i \lambda^i \in K \quad (\lambda^0 = 1_K)$$

$$M \in \mathrm{M}_n(K) \quad \Longrightarrow \quad p(M) := \sum_{i=0}^{s} a_i M^i \in \mathrm{M}_n(K) \quad (M^0 = E_n)$$

$$f \in \mathrm{End}_K(V) \quad \Longrightarrow \quad p(f) := \sum_{i=0}^{s} a_i f^i \in \mathrm{End}_K(V) \quad (f^0 = \mathrm{id}_V)$$

Beweise: Ist $\lambda \in K$ Eigenwert eines Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$, so ist $p(\lambda)$ Eigenwert des Endomorphismus $p(f)$. (3)

55. Aufgabe: Sei $M \in \mathrm{M}_2(K)$.

a) Beweise direkt für das charakteristische Polynom $p_M = T^2 - \mathrm{Sp}(M) \cdot T + \det(M)$.
(**Hinweis:** Es darf insbesondere (20.13) nicht benutzt werden!)

b) Beweise: $p_M(M) = O$ (Nullmatrix) (Zur Definition von $p_M(M)$ s. Aufg. 54) (3)

56. Aufgabe: $f : V \longrightarrow V$ sei ein Isomorphismus, und $\lambda \in K$ sei ein Eigenwert von f. Beweise, daß $\lambda \neq 0$ gilt und daß λ^{-1} ein Eigenwert von f^{-1} ist. (1)

***57. Aufgabe:** Es sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$–Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Für $i \in \mathbb{N}$ sei die Abbildung $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_i(x) = x^i$ $(\forall\, x \in \mathbb{R})$. Ferner sei $U := \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ der von $B := \{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ erzeugte Untervektorraum von $\mathcal{A}$ (U ist der Vektorraum aller "Polynomabbildungen vom Grade $\leq n$").

a) Beweise, daß B eine Basis von U ist.

b) Begründe mit Hilfe von a), daß der Vektorraum $\mathcal{A}$ unendlichdimensional ist.

c) Die Abbildung $d : U \longrightarrow U$ sei definiert durch $d(f) = f'$ (Ableitung von f) für $f \in U$. Es ist bekannt, daß d ein $\mathbb{R}$–Endomorphismus von U ist. Beweise, daß d nilpotent ist, und bestimme die Darstellungsmatrix von d bzgl. B. Welchen Rang hat d? (4*)

Internet: http://math–www.uni–paderborn.de/~ chris

Klausurtermin: 26.7.2005, 8.30–11.30 Uhr