11. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Abgabe: Donnerstag, 30.6.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

47. Aufgabe: Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & -1 & 2i \\ 1+i & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4)

48. Aufgabe: Seien $n \geq 1$ und $x_1, \ldots, x_n \in K$. Die Matrix $C_{n+1} = (c_{ik}) \in \mathrm{M}_{n+1}(K)$ sei definiert durch $c_{ik} := \begin{cases} 1 + x_{i-1} & \text{für } i = k \geq 2 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ Beweise: $\det(C_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n} x_i$ für alle $n \geq 1$.

(3)

49. Aufgabe: Zeige ohne Benutzung von Entwicklungsformeln:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(2)

50. Aufgabe: a) Berechne die Determinanten der Elementarmatrizen aus Definition (A.3).

b) Beweise (19.19) aus der Vorlesung.

c) Sei $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(K)$ eine obere Dreiecksmatrix. Berechne $\det(A)$.

d) Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Beweise, daß man mit Hilfe des Gauß –Algorithmus eine Produktdarstellung $A = P \cdot B$ erhält, wobei P ein Produkt von Vertauschungs– und Additionsmatrizen (aber nicht von Multiplikationsmatrizen) ist und B eine obere Dreiecksmatrix ist. Beweise: $\det(A) = (-1)^k \cdot \det(B)$. Wodurch ist k bestimmt?

e) Überlege dir (informell), wieviele Rechenoperationen (Multiplikationen und Additionen) die Berechnung der Determinante einer $(n \times n)$–Matrix mit Hilfe der Laplace'schen Entwicklungsformel benötigt. Vergleiche das Ergebnis mit der Anzahl der Rechenoperationen, die bei dem in d) angegebenen Verfahren erforderlich sind. (7)

***51. Aufgabe:** Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine “Blockmatrix” der Form

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & \star \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{B_r} \end{pmatrix}$$

wobei B_i eine $(m_i \times m_i)$–Matrix ist $(r \geq 1\ ,\ i = 1, \ldots, r)$ und $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$ gilt. Beweise:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{r} \det(B_i)$$

(4*)

Internet: http://math–www.uni–paderborn.de/˜ chris

Klausurtermin: 26.7.2005, 8.30–11.30 Uhr