10. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Abgabe: Do, 23.6.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

42. Aufgabe: Sei $\nabla_n(K) \subseteq \mathrm{M}_n(K)$ die Menge der oberen $(n \times n)$–Dreiecksmatrizen über K (eine obere Dreiecksmatrix hat unterhalb der Haupdiagonale nur die Elemente 0). Beweise:

a) $\nabla_n(K)$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{M}_n(K)$. Bestimme die Dimension von $\nabla_n(K)$.

b) $\nabla_n(K)$ ist ein Unterring von $\mathrm{M}_n(K)$.

c) Die Abbildung $f : \nabla_n(K) \longrightarrow K^n$, definiert durch $(a_{ik}) \longmapsto (a_{ii})_{i=1,\dots,n}$ ist ein K–Epimorphismus. Bestimme den Kern von f und dessen Dimension.

d) Für $A = (a_{ik}) \in \nabla_n(K)$ gilt: $\mathrm{rg}(A) = n \iff \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$. (5)

43. Aufgabe: **a)** Beweise, daß die Ähnlichkeitsrelation $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathrm{M}_n(K)$ ist.

b) Bezeichne $E_n \in \mathrm{M}_n(K)$ die Einheitsmatrix und sei $M := aE_n \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $a \in K$. Bestimme die Menge

$$[M] := \{A \mid A \in \mathrm{M}_n(K), A \approx M\}$$

aller zu M ähnlichen Matrizen aus $\mathrm{M}_n(K)$.

c) Für $M, N \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt: $M \approx N \implies M^k \approx N^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

d) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zwei Matrizen über $\mathbb{R}$. Untersuche, ob A und B äquivalent bzw. ähnlich zueinander sind.

e) Beweise (18.40). (6)

44. Aufgabe: Für einen Ring R sei $Z(R) := \{a \mid a \in R, ax = xa \ \forall x \in R\}$ das "Zentrum" von R. Beweise:

a) $Z(R)$ ist ein Unterring von R.

b) K Schiefkörper $\implies$ $Z(K)$ Unterkörper von K.

c) $Z(\mathrm{M}_n(K)) = \{aE_n \mid a \in K\}$ (Hierbei bezeichnet E_n die n–reihige Einheitsmatrix in $\mathrm{M}_n(K)$). (5)

***45. Aufgabe:** Sei V ein K–Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Für $v \in V$ sei die "Nebenklasse" $[v]_U$ von v nach U definiert durch $[v]_U := v + U$. Ferner sei $V/U := \{ [v]_U \mid v \in V \}$ (V/U lies: "V nach U"). Beweise:

a) $\forall\, v, w \in V \,:\, [v]_U = [w]_U \iff v - w \in U$.

b) Durch die Festsetzungen $[v]_U + [w]_U := [v+w]_U$ und $\alpha[v]_U := [\alpha v]_U$ werden eine Addition und eine skalare Multiplikation auf V/U definiert, so daß V/U zu einem K–Vektorraum wird.

Hinweis: Es ist als erstes zu überlegen, daß die Definitionen der Verknüpfungen unabhängig von der Auswahl der "Vertreter" v und w der jeweiligen Nebenklassen sind. Zeige dazu:

$[v]_U = [v']_U$ und $[w]_U = [w']_U \implies [v + w]_U = [v' + w']_U$

$[v]_U = [v']_U \implies [\alpha v]_U = [\alpha v']_U$

c) Sei V endlichdimensional. Konstruiere eine Basis von V/U und bestimme die Dimension von V/U.

d) Beweise, daß V/U zu einem direkten Komplement von U in V isomorph ist. Gib diesen Isomorphismus explizit an.

(4*)

Internet: http://math–www.uni–paderborn.de/˜ chris