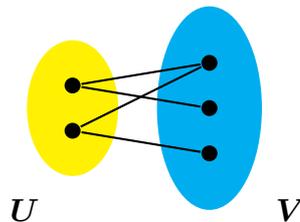


§4: Bipartite Graphen

Häufig tritt die folgende Situation auf:

Die Eckenmenge E eines Graphen läßt sich in zwei disjunkte nichtleere Teilmengen U und V zerlegen, so dass es Kanten nur zwischen einer Ecke aus U und einer Ecke aus V gibt, nicht aber zwischen zwei Ecken aus U bzw. aus V . Man spricht dann von einem bipartiten Graphen.

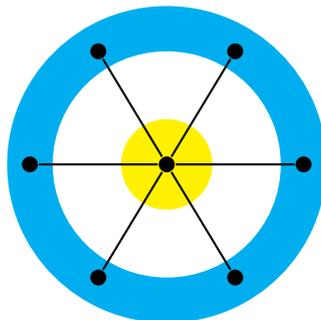


(4.1) DEF: a) Ein Graph $G = (E, K)$ heißt **bipartit**, wenn $E = U \dot{\cup} V$ die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer Teilmengen U und V (d.h. $U \cap V = \emptyset$) ist und wenn jede Kante aus K eine Begrenzungscke in U und eine Begrenzungscke in V hat.

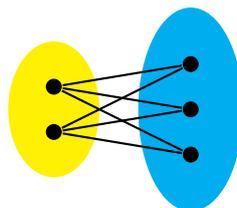
b) Ein schlichter bipartiter Graph $G = (U \dot{\cup} V, K)$, bei dem jede Ecke aus U adjazent zu jeder Ecke aus V ist, heißt ein **vollständiger bipartiter Graph**.

c) Ein vollständiger bipartiter Graph $G = (U \dot{\cup} V, K)$ mit $|U| = m$ und $|V| = n$ wird mit $K_{m,n}$ bezeichnet.

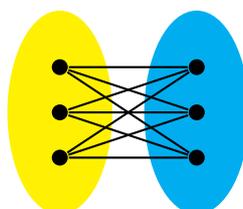
(4.2) BEISPIELE: a) Der vollständige bipartite Graph $K_{1,6}$ (Man nennt den Graphen $K_{1,n}$ einen **Stern-Graphen**):



b) Der vollständige bipartite Graph $K_{2,3}$:



c) Der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$:



(4.3) BEM: Der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$ hat genau $m + n$ Ecken und $m \cdot n$ Kanten.

(4.4) BEM: $G = (E, K)$ sei ein bipartiter Graph mit der disjunkten Zerlegung $E = U \cup V$ der Eckenmenge E von G . Dann hat jeder Kantenzug zwischen zwei Ecken aus U (bzw. V) eine gerade Länge. Insbesondere gibt es in einem bipartiten Graphen keine Kreise ungerader Länge.

(4.5) SATZ: Sei G ein Graph mit mindestens 2 Ecken. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) G ist bipartit
- b) G besitzt keine Schlingen, und die Ecken von G können so mit zwei Farben gefärbt werden, dass je zwei adjazente Ecken unterschiedliche Farben haben.

(4.6) SATZ: Für einen Graphen G mit mindestens zwei Ecken sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) G ist bipartit
- b) G enthält keine Schlingen, und jede Zusammenhangskomponente mit mindestens zwei Ecken ist bipartit.

(4.7) SATZ: (König, 1936)

Ein Graph mit mindestens zwei Ecken ist genau dann bipartit, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.

(4.8) SATZ: Heiratssatz