§4 . Vektoren im Anschauungsraum

(4.1) SATZ: Die Addition von Vektoren des Anschauungsraumes hat die folgenden Eigenschaften:

$\mathbf{A_0}$) Je zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ wird ein eindeutig bestimmter Vektor $\vec{v}+\vec{w}$ zugeordnet.

$\mathbf{A_1}$) Für alle Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt
$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
(Assoziativgesetz)

$\mathbf{A_2}$) Für alle Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt $\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$
(Kommutativgesetz)

$\mathbf{A_3}$) Es existiert ein Vektor $\vec{o}$ mit $\vec{v}+\vec{o} = \vec{v}$ für alle Vektoren $\vec{v}$ **(Existenz eines Nullvektors)**

$\mathbf{A_4}$) Zu jedem Vektor $\vec{v}$ gibt es einen Vektor $\vec{w}$ mit
$\vec{v}+\vec{w} = \vec{o}$
(Existenz von negativen Vektoren)

(4.2) SATZ: Die Skalarmultiplikation von Vektoren des Anschauungsraumes mit reellen Zahlen hat die folgenden Eigenschaften:

$\mathbf{SM_0}$) Jedem (Skalar) $r \in \mathbb{R}$ und jedem Vektor $\vec{v}$ wird ein eindeutig bestimmter Vektor $r\vec{v}$ zugeordnet.

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{SM_1}) & r(\vec{v}+\vec{w}) = r\vec{v}+r\vec{w} \\ \mathbf{SM_2}) & (r+s)\vec{v} = r\vec{v}+s\vec{v} \\ \mathbf{SM_3}) & r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v} \\ \mathbf{SM_4}) & 1\vec{v} = \vec{v} \end{array}\right\} \quad \text{für alle } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{A} \text{ und alle } r, s \in \mathbb{R}$$

(4.3) DEF: Eine Menge V zusammen mit zwei Rechenoperationen $+$ (Addition) und $\cdot_{\mathbb{R}}$ (Skalarmultiplikation mit reellen Zahlen) heißt ein **reeller Vektorraum** oder **Vektoraum über dem Körper der reellen Zahlen**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$\mathbf{A_0}$) Je zwei Elementen v und w wird eine eindeutig bestimmte Summe $v + w \in V$ zugeordnet

$\mathbf{A_1}$) Für alle $u, v, w \in V$ gilt $(u+v)+w = u+(v+w)$ **(Assoziativgesetz)**

$\mathbf{A_2}$) Für alle $v, w \in V$ gilt $v + w = w + v$ **(Kommutativgesetz)**

$\mathbf{A_3}$) Es existiert $o \in V$ mit $v + o = v$ für alle $v \in V$ **(Existenz eines Nullelementes)**

$\mathbf{A_4}$) Zu jedem $v \in V$ gibt es ein $w \in V$ mit $v + w = o$ **(Existenz von negativen Elementen)**

$\mathbf{SM_0}$) Jedem $r \in \mathbb{R}$ und jedem $v \in V$ wird ein eindeutig bestimmtes Element $rv \in V$ zugeordnet

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{SM_1}) & r(v+w) = rv + rw \\ \mathbf{SM_2}) & (r+s)v = rv + sv \\ \mathbf{SM_3}) & r(sv) = (rs)v \\ \mathbf{SM_4}) & 1\,v = v \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{für alle } v, w \in V \\ \text{und alle } r, s \in \mathbb{R} \end{array}$$

Bezeichnungen und Bemerkungen:

Die Elemente eines Vektorraumes über $\mathbb{R}$ heißen **Vektoren** , die Elemente aus $\mathbb{R}$ **Skalare**. Das Element $o \in V$ nach $\mathbf{A_3}$) ist eindeutig bestimmt und heißt **Nullvektor in V**. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird er manchmal auch mit o_V bezeichnet. Das zu v nach $\mathbf{A_4}$) existierende Element $w \in V$ mit $v + w = o$ ist eindeutig bestimmt und heißt der zu v **negative Vektor** . Er wird mit $-v$ bezeichnet. Außerdem setzt man $v - w := v + (-w)$ für zwei Vektoren $v, w \in V$.