21.10.2004

§ 2 Logik

Aussagenlogik

(2.1) DEF: Verknüpfungen von Aussagen

a) **Disjunktion:** $\mathbf{A \vee B}$

"A oder B"

(nicht ausschließendes "oder")

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

b) **Konjunktion:** $\mathbf{A \wedge B}$

"A und B"

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

c) **Negation:** $\mathbf{\neg A}$

"nicht A"

A	$\neg A$
W	F
F	W

d) **Implikation:** $\mathbf{A \Longrightarrow B}$

"wenn A, dann B"

oder: "aus A folgt B"

A	B	$A \Longrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

e) **Äquivalenz:** $\mathbf{A \Longleftrightarrow B}$

"wenn A, dann B und umgekehrt"

oder: "A genau dann, wenn B"

oder: "A dann und nur dann, wenn B"

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

(2.2) DEF: **a)** Eine logische Formel $\boldsymbol{P}$ heißt **allgemeingültig**, wenn sie nur den Wahrheitswert $\boldsymbol{W}$ annimmt.

b) Zwei logische Formeln $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{Q}$ heißen **logisch äquivalent**, wenn die Äquivalenz $\boldsymbol{P} \Longleftrightarrow \boldsymbol{Q}$ allgemeingültig ist.

(2.3) SATZ: Formeln für $\neg$, $\vee$ und $\wedge$

$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{R}$ seien beliebige logische Formeln. Dann sind die folgenden logischen Formeln allgemeingültig:

a) $\boldsymbol{P} \vee (\neg \boldsymbol{P})$ **b)** $\neg(\boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{P})$ **c)** $\neg(\neg \boldsymbol{P}) \Longleftrightarrow \boldsymbol{P}$ $(\surd)$

d) $\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q} \Longleftrightarrow \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q} \Longleftrightarrow \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{P}$ **(Kommutativgesetze)**

e) $(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{R} \Longleftrightarrow \boldsymbol{P} \wedge (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R})$, $(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \vee \boldsymbol{R} \Longleftrightarrow \boldsymbol{P} \vee (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R})$
(Assoziativgesetze)

f) $\neg(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \Longleftrightarrow (\neg \boldsymbol{P}) \vee (\neg \boldsymbol{Q})$ $(\surd)$, $\neg(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \Longleftrightarrow (\neg \boldsymbol{P}) \wedge (\neg \boldsymbol{Q})$ (A)
(Regeln von de Morgan)

g) $\boldsymbol{P} \wedge (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}) \Longleftrightarrow (\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \vee (\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{R})$
$\boldsymbol{P} \vee (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R}) \Longleftrightarrow (\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{R})$ **(Distributivgesetze)**

Ein Beweis wird mit Hilfe von Wahrheitstafeln geführt.

(2.4) SATZ: Formeln für die Implikation

$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{R}$ seien beliebige logische Formeln. Dann sind die folgenden logischen Formeln allgemeingültig:

a) $(\boldsymbol{P} \Longleftrightarrow \boldsymbol{Q}) \Longleftrightarrow [(\boldsymbol{P} \Longrightarrow \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \Longrightarrow \boldsymbol{P})]$

b) $[(\boldsymbol{P} \Longrightarrow \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \Longrightarrow \boldsymbol{R})] \Longrightarrow (\boldsymbol{P} \Longrightarrow \boldsymbol{R})$ **(Transitivität)** $(\surd)$

c) $(\boldsymbol{P} \Longrightarrow \boldsymbol{Q}) \Longleftrightarrow (\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q})$ $(\surd)$

d) $(\boldsymbol{P} \Longrightarrow \boldsymbol{Q}) \Longleftrightarrow (\neg \boldsymbol{Q} \Longrightarrow \neg \boldsymbol{P})$ **(Kontraposition)** $(\surd)$

e) $(\boldsymbol{P} \Longrightarrow \boldsymbol{Q}) \Longleftrightarrow [(\boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{Q}) \Longrightarrow \neg \boldsymbol{P}]$ $(\surd)$

f) $(\boldsymbol{P} \Longrightarrow \boldsymbol{Q}) \Longleftrightarrow [(\boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{Q}) \Longrightarrow \boldsymbol{Q}]$

g) $(\boldsymbol{P} \Longrightarrow \boldsymbol{Q}) \Longleftrightarrow [(\boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{Q}) \Longrightarrow (\boldsymbol{R} \wedge \neg \boldsymbol{R})]$

Ein Beweis wird mit Hilfe von Wahrheitstafeln oder durch **äquivalentes Umformen** geführt. Etwa für (2.4b):

P	Q	R	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow R$	$P \Longrightarrow Q \wedge Q \Longrightarrow R$	$P \Longrightarrow R$	$(P \Longrightarrow Q \wedge Q \Longrightarrow R) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F	W
W	F	W	F	W	F	W	W
W	F	F	F	W	F	F	W
F	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	F	W	W
F	F	W	W	W	W	W	W
F	F	F	W	W	W	W	W

Die Formeln e),f) und g) sind Grundlage für die **indirekte Beweisführung**.

(2.5) BEM: Beispiele für eine indirekte Beweisführung:

a) $a \in \mathbb{Z}\ ,\ a^2$ gerade $\Longrightarrow$ a gerade ($\surd$)

b) $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl ($\surd$)

25.10.2004

c) Um die Implikation $P \Longrightarrow Q$ mit Hilfe eines **indirekten Beweises** nachzuweisen, nehmen wir das logische Gegenteil von Q an und leiten aus dieser Annahme einen **Widerspruch** her. Wir gehen also von $P \wedge \neg Q$ aus und folgern daraus $\neg P$, Q oder $R \wedge \neg R$ für eine geeignete Aussage R. Auf Grund von (2.4e), f) bzw. g) ist dann die Implikation $P \Longrightarrow Q$ gültig.

Prädikatenlogik

Es sei $A(x)$ ein Prädikat. Beim Einsetzen von Werten für x, die aus einem bestimmten Bereich stammen können, wird aus $A(x)$ eine Aussage, die dann entweder wahr oder falsch ist.

(2.6) DEF: (Quantoren)

Bezeichnung	Bedeutung
$\forall\, x : A(x)$	für alle x gilt $A(x)$
$\forall\, x \in M : A(x)$	für alle Elemente x aus einer Menge M gilt $A(x)$
$\exists\, x : A(x)$	es gibt ein x, für das $A(x)$ gilt
$\exists\, x \in M : A(x)$	es gibt ein Element x aus einer Menge M, für das $A(x)$ gilt

(2.7) SATZ: Negation von Formeln mit $\forall$ und $\exists$

a) $\neg(\forall\, x : A(x)) \iff (\exists\, x : \neg A(x))$

b) $\neg(\exists\, x : A(x)) \iff (\forall\, x : \neg A(x))$