(6) Einschub: Vollständige Induktion und Rekursion

(10.18) BEISPIEL: Nachweis der Formel $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ mit Hilfe vollständiger Induktion.

(10.19) SATZ: Beweis durch vollständige Induktion

$n_0 \in \mathbb{N}$ sei eine feste Zahl, und es sei $A(n)$ eine Aussage in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$. Kann man dann beweisen:

i) $A(n_0)$ ist richtig,

ii) Aus der Richtigkeit von $A(n)$ für eine **beliebige**, aber **feste** natürliche Zahl $n \geq n_0$ folgt die Richtigkeit von $A(n+1)$,

so ist $A(n)$ für **alle** natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ richtig.

Formal läßt sich ii) schreiben als $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\, n \geq n_0 : A(n) \implies A(n+1)$

Bezeichnungen: Ein Induktionsbeweis besteht immer aus 2 Beweis–Teilen:

1) dem **Induktionsanfang (IA)**

hier wird bewiesen, daß die Behauptung für $n = n_0$ richtig ist

2) dem **Induktionsschluß (IS)** oder dem "**Schluß von** n **auf** $n+1$":

hier wird unter der **Induktionsvoraussetzung (IV)**, daß die Behauptung für eine beliebige (aber feste) natürliche Zahl $n \geq n_0$ richtig ist, die **Induktionsbehauptung (IB)** bewiesen, daß dann die Behauptung auch für $n+1$ richtig ist.

Grundlage für diese Beweismethode ist das sog. Induktionsprinzip aus den Peano–Axiomen für die natürlichen Zahlen:

(10.20) Die PEANO–Axiome für die natürlichen Zahlen:

P_1) 0 ist eine natürliche Zahl

P_2) Jede natürliche Zahl n besitzt eine natürliche Zahl n' als **Nachfolger**

P_3) 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl

P_4) Haben zwei natürliche Zahlen denselben Nachfolger, so sind sie gleich

P_5) **Induktionsprinzip**
Eine Menge T natürlicher Zahlen, die 0 enthält und mit jeder Zahl auch deren Nachfolger, enthält **alle** natürlichen Zahlen.

Unter den Voraussetzungen i) und ii) aus (10.19) läßt sich zeigen, daß die Menge

$$T := \{\, n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, A(n) \text{ ist richtig} \,\} \subseteq \mathbb{N}$$

auf Grund von P_5) gleich der Menge aller natürlichen Zahlen $\geq n_0$ ist, d.h. $A(n)$ ist dann für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ richtig.

Das Induktionsprinzip steht in engem Zusammenhang mit der sog. Wohlordung der natürlichen Zahlen:

(10.21) SATZ: Die geordnete Menge $(\mathbb{N}, \leq)$ ist **wohlgeordnet**, d.h. jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

Man kann die Wohlordnung von $(\mathbb{N}, \leq)$ mit Hilfe des Induktionsprinzips P_5) beweisen und umgekehrt aus der Wohlordnung von $(\mathbb{N}, \leq)$ das Induktionsprinzip folgern.