§ 10 Lineare Gleichungssysteme

(10.1) Bezeichnungen: Ein System

$$(\star)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = \quad b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = \quad b_2 \\ \qquad\qquad\vdots & \qquad\;\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = \quad b_m \end{cases}$$

aus m linearen Gleichungen mit reellen Koeffizienten für n Unbekannte heißt ein **lineares Gleichungssystem (LGS)** über $\mathbb{R}$.

Mit der **Koeffizientenmatrix**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

und dem **Vektor** $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ **der rechten Seite** läßt sich das LGS $(\star)$ darstellen in der Form

$$A \cdot x = b\,,$$

wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der **Spaltenvektor der Unbekannten** ist.

Die Matrix

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \; := \; \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \in \mathrm{M}_{m,(n+1)}(\mathbb{R})$$

heißt die **erweiterte Koeffizientenmatrix von** $(\star)$.

Ein Spaltenvektor $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ heißt eine **Lösung von** $(\star)$, wenn $\boldsymbol{A \cdot y = b}$ gilt.

$\text{Lös}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) := \{ \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{Ay = b} \}$ heißt die **Lösungsmenge von** $(\star)$.

Das LGS $\boldsymbol{Ax = b}$ heißt **lösbar**, wenn $\text{Lös}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ ist, ansonsten **unlösbar**.

Das LGS $\boldsymbol{Ax = b}$ heißt **homogen**, wenn $\boldsymbol{b = o_m}$ der Nullvektor ist, ansonsten **inhomogen**.

Probleme:

- Wie läßt sich rechnerisch feststellen, ob ein Gleichungssystem lösbar ist oder nicht?
- Was läßt sich über die "Größe" der Lösungsmenge aussagen?
- Was läßt sich über die Lösungen aussagen?
- Wie läßt sich die Lösungsmenge rechnerisch bestimmen?

(10.2) SATZ: Die Lösungsmenge des LGS's

$$(\star) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

ändert sich nicht unter den folgenden Operationen:

I) Vertauschung zweier Gleichungen

II) Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar $\neq 0$

III) Addition des skalaren Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Bew: **I)** ist klar.

II) Wir multiplizieren die j–te Gleichung mit $r \neq 0$ und erhalten das LGS

$$(\star\star) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ ra_{j1}x_1 + ra_{j2}x_2 + \ldots + ra_{jn}x_n & = & rb_j \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Es sei L die Lösungsmenge von $(\star)$ und L' die von $(\star\star)$. Beh: $L = L'$

Ist $y = (y_k) \in L$ beliebig, so gilt für alle $i = 1, 2, \ldots, m$

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n \;=\; b_i$$

insbesondere also für $i = j$

$$a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jn}y_n \;=\; b_j$$

Multipliziert man diese Gleichung (auf beiden Seiten) mit r, so ergibt sich

$$r(a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jn}y_n) \;=\; ra_{j1}y_1 + ra_{j2}y_2 + \ldots + ra_{jn}y_n \;=\; rb_j$$

d.h. y ist auch eine Lösung von $(\star\star)$, ist also ein Element von L'.

Ist umgekehrt $y = (y_k) \in L'$, so sind alle Gleichungen von $(\star\star)$ erfüllt, insbesondere gilt

$$ra_{j1}y_1 + ra_{j2}y_2 + \ldots + ra_{jn}y_n \;=\; rb_j$$

Multiplikation dieser Gleichung mit r^{-1} (nach Vor. ist $r \neq 0$!!) ergibt

$$a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jn}y_n = b_j$$

so daß $y_1, \ldots, y_n$ alle Gleichungen von $(\star)$ erfüllen, also $y \in L$.

III) Sei $r \in \mathbb{R}$. Wir addieren das r–fache der i–ten Gleichung zur j–ten Gleichung ($i \neq j$) und erhalten das folgende LGS:

$$(\star\star\star)\quad \left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{j1} + ra_{i1})x_1 + (a_{j2} + ra_{i2})x_2 + \ldots + (a_{jn} + ra_{in})x_n & = & b_j + rb_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Es sei L die Lösungsmenge von $(\star)$ und L'' die von $(\star\star\star)$. Beh: $L = L''$

Ist $y = (y_k) \in L$, so gilt insbesondere

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n \;=\; b_i$$

$$a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jn}y_n \;=\; b_j \; .$$

Die Addition der mit r multiplizierten i–ten Gleichung zur j–ten Gleichung ergibt

$$(a_{j1} + ra_{i1})y_1 + (a_{j2} + ra_{i2})y_2 + \ldots + (a_{jn} + ra_{in})y_n \;=\; b_j + rb_i$$

Damit erfüllen $y_1, \ldots, y_n$ alle Gleichungen von $(\star\star\star)$, also $y \in L''$. Ist umgekehrt $y = (y_k) \in L''$, so gilt insbesondere

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n \;=\; b_i$$

$$(a_{j1} + ra_{i1})y_1 + (a_{j2} + ra_{i2})y_2 + \ldots + (a_{jn} + ra_{in})y_n \;=\; b_j + rb_i \; .$$

Addiert man nun zur unteren Gleichung die mit $-r$ multiplizierte i–te Gleichung, so ergibt sich

$$a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jn}y_n \;=\; b_j \; .$$

Folglich erfüllen $y_1, \ldots, y_n$ alle Gleichungen von $(\star)$, d.h. $y \in L$. Insgesamt ist damit $L = L''$ gezeigt.

(10.3) DEF: Unter einer **elementaren Zeilenumformung** einer Matrix versteht man eine der folgenden Umformungen:

I) Vertauschung zweier Zeilen

II) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\neq 0$

III) Addition des skalaren Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

(10.4) BEM: Die Lösungsmenge eines LGS's $Ax = b$ ändert sich nicht, wenn man an der erweiterten Koeffizientenmatrix elementare Zeilenumformungen vornimmt.

(10.5) BEISPIEL: Lösung eines LGS's

LGS	**erweiterte Koeffizientenmatrix**
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \end{array}$$	$$\left.\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right.$$
Addition der mit (-2) multiplizierten 1. Gl. zur 2. Gl. und der mit (-3) multiplizierten 1. Gl. zur 3. Gl.	Addition des (-2)–fachen der 1. Zeile zur 2. und des (-3)–fachen der 1. Zeile zur 3. Zeile
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ & - & 2x_2 & - & 4x_3 & = & -6 \end{array}$$	$$\begin{array}{rrr\|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}$$
Addition der mit (-2) multiplizierten 2. Gl. zur 3. Gl.	Addition des (-2)–fachen der 2. Zeile zur 3. Zeile
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \end{array}$$	$$\begin{array}{rrr\|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$
Multiplikation der zweiten Gl. mit -1	Multiplikation der zweiten Zeile mit -1
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$	$$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Der Matrix auf der rechten Seite entspricht das linksstehende LGS, das aus zwei Gleichungen für drei Unbekannte besteht. Wir können daher eine Unbekannte frei wählen (etwa $x_3 = t \in \mathbb{R}$) und die anderen Unbekannten in Abhängigkeit von t bestimmen. Aus der zweiten Gleichung ergibt sich damit $x_2 = 3 - 2t$ und aus der ersten

$$x_1 = 4 - 2x_2 - 3x_3 = 4 - 6 + 4t - 3t = -2 + t$$

Damit hat die Lösungsmenge das folgende Aussehen:

$$\text{Lös}(A, b) \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} -2 + t \\ 3 - 2t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Jeder Lösungsvektor hängt in diesem Falle von einem frei wählbaren **Parameter** $t \in \mathbb{R}$ ab. Durch Einsetzen der Lösungen in die drei ursprünglichen Gleichungen kann man die **Probe** machen.

(10.6) BEISPIEL:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boldsymbol{x_1} & - & \boldsymbol{2x_2} & & & = & \boldsymbol{1} \\ & & \boldsymbol{x_2} & + & \boldsymbol{x_3} & = & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{x_1} & & & + & \boldsymbol{x_3} & = & \boldsymbol{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \hline \end{array}$$

Wir erhalten aus dem zugehörigen LGS

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boldsymbol{x_1} & & & + & \boldsymbol{2x_3} & = & \boldsymbol{-1} \\ & & \boldsymbol{x_2} & + & \boldsymbol{x_3} & = & \boldsymbol{-1} \\ & & & & \boldsymbol{x_3} & = & \boldsymbol{-3} \end{array}$$

als **einzige** Lösung:

$\boldsymbol{x_3 = -3 \quad\Longrightarrow\quad x_2 = -1 - x_3 = 2 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = -1 - 2x_3 = 5}$

d.h. die Lösungsmenge ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix} \right\}$$

(10.7) BEISPIEL:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{x_1} & + & \mathbf{2x_2} & + & \mathbf{x_3} & = & \mathbf{1} \\ \mathbf{2x_1} & + & \mathbf{4x_2} & + & \mathbf{2x_3} & = & \mathbf{-1} \\ \mathbf{x_1} & - & \mathbf{x_2} & + & \mathbf{x_3} & = & \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ \hline \end{array}$$

Wir erhalten aus der letzten Zeile die Gleichung $\mathbf{0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -3}$.

Annahme: Es gibt eine Lösung $(y_k) \in \mathbb{R}^3$. Dann ergibt sich mit $\mathbf{0 = -3}$ ein **Widerspruch**. Das LGS ist also **nicht** lösbar.

(10.8) BEISPIEL:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{x_1} & + & \mathbf{x_2} & + & \mathbf{x_3} & = & \mathbf{1} \\ \mathbf{3x_1} & + & \mathbf{6x_2} & + & \mathbf{3x_3} & = & \mathbf{3} \\ \mathbf{2x_1} & + & \mathbf{4x_2} & + & \mathbf{2x_3} & = & \mathbf{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Wir erhalten das LGS

$$\boldsymbol{x_1 + 2x_2 + x_3 = 1}$$

das aus einer Gleichung für drei Unbekannte besteht. Wir können zwei Unbekannte frei wählen und die dritte daraus berechnen:

Setze $\boldsymbol{x_3 = t \in \mathbb{R}}$, $\boldsymbol{x_2 = s \in \mathbb{R}} \implies \boldsymbol{x_1 = 1 - 2s - t}$. Die Lösung hängt also von zwei frei wählbaren Parametern $\boldsymbol{s}$ und $\boldsymbol{t}$ ab, die unabhängig voneinander die reellen Zahlen durchlaufen. Als Lösungsmenge erhalten wir:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{1 - 2s - t} \\ \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix} \;\middle|\; \boldsymbol{r, s \in \mathbb{R}} \right\}$$