14.10.2004

Hinweis: Im folgenden finden Sie eine Auflistung der Definitionen und Sätze, die in der Vorlesung behandelt wurden oder werden. Es fehlen aber jedliche Motivationen, Erklärungen, Beispiele und Beweise, die alle zusammen für das richtige Verständnis von größter Wichtigkeit sind.

Die in der Vorlesung bewiesenen Aussagen sind mit $(\surd)$ gekennzeichnet, die Aussagen, die als Übungsaufgaben zu bearbeiten sind, mit (A).

Kap. 0 Grundlagen und Bezeichnungen

§ 1 Die reellen Zahlen

Es gibt zwei Zugänge zu den reellen Zahlen: konstruktiv oder axiomatisch.

Bei der konstruktiven Einführung werden die einzelnen Zahlbereichserweiterungen ausgehend von den natürlichen Zahlen vorgenommen, ein sehr aufwendiges Verfahren.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{Z}$: Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q}$: Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{C}$: Menge der komplexen Zahlen

Beim axiomatischen Vorgehen werden die reellen Zahlen zusammen mit ihrer Addition und Multiplikation als gegeben vorausgesetzt , wobei die folgenden grundlegenden Rechenregeln gelten sollen:

(1.1) Grundeigenschaften von $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{R}$

Addition

$\mathbf{A_0}$) $x + y \in \mathbb{R}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (**Abgeschlossenheit**)

$\mathbf{A_1}$) $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ (**Assoziativgesetz**)

$\mathbf{A_2}$) $x + y = y + x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (**Kommutativgesetz**)

$\mathbf{A_3}$) $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (**Nullelement**)

$\mathbf{A_4}$) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$
(**Existenz von negativen Elementen**)

Multiplikation

$\mathbf{M_0}$) $x \cdot y \in \mathbb{R}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (**Abgeschlossenheit**)

$\mathbf{M_1}$) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ (**Assoziativgesetz**)

$\mathbf{M_2}$) $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (**Kommutativgesetz**)

$\mathbf{M_3}$) $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (**Einselement**)

$\mathbf{M_4}$) Zu jedem $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot y = 1$
(**Existenz von inversen Elementen**)

Distributivgesetz

D) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$

Fazit: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper

Aus diesen Grundregeln lassen sich weitere Rechenregeln herleiten:

(1.2) BEM: a) In $\mathbb{R}$ gibt es genau ein Nullelement ($\checkmark$) (bzw. Einselement),

b) in $\mathbf{A_4}$) ist das Element y eindeutig bestimmt,

c) in $\mathbf{M_4}$) ist das Element y eindeutig bestimmt. ($\checkmark$)

Bezeichnungen: Für das eindeutig bestimmte Element y in $\mathbf{A_4}$) schreibt man $-x$ und für y in $\mathbf{M_4}$) x^{-1}. Außerdem setzt man $x - y := x + (-y)$ und $\dfrac{x}{z} := x \cdot z^{-1}$ (falls $z \neq 0$).
Vereinfachend ist $x \cdot y =: x\,y$ gebräuchlich.

Außerdem setzt man fest: "Punktrechnung geht vor Strichrechnung".

(1.3) Weitere Rechenregeln: Für alle $\boldsymbol{x, y \in \mathbb{R}}$ gilt:

a) $\boldsymbol{-(-x) = x}$ ($\checkmark$) b) $\boldsymbol{-(x+y) = -x-y}$ (A) c) $\boldsymbol{x \cdot 0 = 0}$ ($\checkmark$)

d) $\boldsymbol{(x^{-1})^{-1} = x}$ $(\boldsymbol{x \neq 0})$

e) $(\boldsymbol{x \neq 0}$ und $\boldsymbol{y \neq 0}) \iff \boldsymbol{x \cdot y \neq 0}$ ($\checkmark$)

f) $\boldsymbol{(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}}$ falls $\boldsymbol{x \cdot y \neq 0}$

g) $\boldsymbol{(-x) \cdot y = -(x \cdot y)}$ (A) h) $\boldsymbol{(-x) \cdot (-y) = x \cdot y}$

Reelle Zahlen lassen sich mit der Kleiner–gleich–Beziehung der Größe nach vergleichen. Diese "Ordnungsrelation" hat die in (1.4) und (1.5) angegebenen Grundeigenschaften.

(1.4) Axiome für $\leq$ auf $\mathbb{R}$

$\mathbf{O_1}$) Für alle $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$ gilt: $\boldsymbol{x \leq x}$ (**Reflexivität**)

$\mathbf{O_2}$) Für alle $\boldsymbol{x, y \in \mathbb{R}}$ gilt: $\boldsymbol{x \leq y}$ und $\boldsymbol{y \leq x} \implies \boldsymbol{x = y}$ (**Antisymmetrie**)

$\mathbf{O_3}$) Für alle $\boldsymbol{x, y, z \in \mathbb{R}}$ gilt: $\boldsymbol{x \leq y}$ und $\boldsymbol{y \leq z} \implies \boldsymbol{x \leq z}$ (**Transitivität**)

$\mathbf{O_4}$) Für alle $\boldsymbol{x, y \in \mathbb{R}}$ gilt: $\boldsymbol{x \leq y}$ oder $\boldsymbol{y \leq x}$ (**Linearität**)

(1.5) Verträglichkeit von $\leq$ mit $+$ und $\cdot$

$\mathbf{O_A}$) Für alle $\boldsymbol{x, y \in \mathbb{R}}$ gilt: $\boldsymbol{x \leq y} \implies \boldsymbol{x + z \leq y + z}$ für alle $\boldsymbol{z \in \mathbb{R}}$

$\mathbf{O_M}$) Für alle $\boldsymbol{x, y \in \mathbb{R}}$ gilt: $\boldsymbol{x \leq y} \implies \boldsymbol{x \cdot z \leq y \cdot z}$ für alle $\boldsymbol{z \in \mathbb{R}}$ mit $\boldsymbol{z \geq 0}$

Man sagt: $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist ein **angeordneter Körper** .

18.10.2004

(1.6) BEM: Für alle $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$ gilt:

a) $\boldsymbol{x \leq 0 \implies -x \geq 0}$ ($\checkmark$) b) $\boldsymbol{x^2 \geq 0}$. ($\checkmark$)

(1.7) DEF: Für $x, y \in \mathbb{R}$ bedeute $x < y$ (echt kleiner), daß $x \leq y$ und $x \neq y$ gilt. Man schreibt dafür auch $y > x$ (echt größer) .

(1.8) BEM: **a)** Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

i) $x < y \implies x + z < y + z$ ($\checkmark$)

ii) $x < y$ und $z > 0 \implies x \cdot z < y \cdot z$ ähnliche (A)

iii) $x < y$ und $y < z \implies x < z$

b) Für je zwei reelle Zahlen x, y gilt genau einer der drei Fälle:

$$x < y \quad \text{oder} \quad x = y \quad \text{oder} \quad x > y.$$

(1.9) DEF: Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl.

a) Die größte ganze Zahl $\leq x$ heißt **floor von** x und wird mit $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet.

b) Die kleinste ganze Zahl $\geq x$ heißt **ceiling von** x und wird mit $\lceil x \rceil$ bezeichnet.

(1.10) SATZ: Für $x \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

a) $\lfloor x \rfloor = m \iff m \leq x < m + 1$

b) $\lceil x \rceil = n \iff n - 1 < x \leq n$.

(1.11) DEF: Für $x \in \mathbb{R}$ ist der **Betrag** $|x|$ definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x \leq 0 \end{cases}$$

(1.12) Eigenschaften des Betrages: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $|x| \geq 0$ **b)** $|x| = 0 \iff x = 0$ **c)** $|x| = |-x|$

d) $-|x| \leq x \leq |x|$ **e)** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ($\checkmark$)

f) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (**Dreiecksungleichung**) (A)

g) $|x + y| \geq |x| - |y|$