

(10.27) BEISPIEL: für den Entzerrungsalgorithmus (modifizierter Gauß-Algorithmus)

Vorgelegt sei das LGS $Ax = b$ mit

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Bringe $(A|b)$ durch elementare Zeilenumformungen auf Treppenform

$$(T(A), b') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Füge Nullzeilen geeignet ein

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Ersetze 0 in der Hauptdiagonale durch -1

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{ccccc|c}
 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2
 \end{array} \right) \\
 \begin{array}{ccccc}
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbf{v}_1 & & \mathbf{v}_2 & & \mathbf{u}
 \end{array}
 \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist

$$\text{Lös}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ \mathbf{u} + t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \left\{ \left(\begin{array}{c}
 1 + 2t_1 + t_2 \\
 -t_1 \\
 -1 + t_2 \\
 -t_2 \\
 2
 \end{array} \right) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Dabei bilden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ eine Basis des Lösungsraumes des zugehörigen homogenen LGS's $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}_5$, und \mathbf{u} ist eine spezielle Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.