Lineare Algebra I (WS 2004/05)

Lösungen 9. Übung

29. Aufgabe: (2+2+2P)

a) Wir addieren das Zweifache der ersten Zeile auf die letzte Zeile:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 21 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ & & 4x_2 & + & 33x_3 & = & 62. \end{array}$$

Wir subtrahieren das Vierfache der zweiten Zeile von der letzten Zeile:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 21 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ & & & & 21x_3 & = & 42. \end{array}$$

Auflösen ergibt:

$$x_1 = 19, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2$$

Die Lösungsmenge ist also $\left\{ \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

b) Wir addieren das $\frac{1}{2}$-fache der ersten Zeile auf die zweite Zeile:

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{3}x_1 & + & 2x_2 & + & \sqrt{5}x_3 & = & 2 \\ & & \frac{1}{2}x_2 & + & (1+\frac{\sqrt{5}}{2})x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & - & (2+2\sqrt{5})x_3 & = & 0 \end{array}$$

Wir addieren das 2-fache der zweiten Zeile auf die dritte Zeile:

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{3}x_1 & + & 2x_2 & + & \sqrt{5}x_3 & = & 2 \\ & & \frac{1}{2}x_2 & + & (1+\frac{\sqrt{5}}{2})x_3 & = & 1 \\ & & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 2 \end{array}$$

Die Gleichung in der letzten Zeile ist nicht lösbar, und somit hat das Gleichungssystem insgesamt keine Lösung. Die Lösungsmenge ist also die leere Menge.

c) Wir addieren das 2-fache der ersten Zeile auf die dritte Zeile und erhalten:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & \frac{11}{2}x_3 & + & x_4 & = & 2. \end{array}$$

Jetzt subtrahieren wir die zweite Zeile von der dritte Zeile:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & \frac{11}{2}x_3 & + & x_4 & = & 2. \end{array}$$

Wir subtrahieren das $\frac{3}{2}$-fache der ersten Zeile von der letzten Zeile und erhalten:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & - & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 & = & -1. \end{array}$$

Wir addieren das $\frac{1}{2}$-fache der zweiten Zeile auf die letzte Zeile und erhalten:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0. \end{array}$$

Wir haben 4 Unbekannte und zwei Gleichungen, können also zwei Parameter frei wählen. Wir entscheiden uns hier für $x_3 = s$ und $x_4 = t$ und bekommen so aus der zweiten Zeile:

$$x_2 = 2 - s - t$$

und nach Einsetzen in die erste Zeile: $x_1 = -2 - \frac{1}{2}s + t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. Als Lösungsmenge erhalten wir $\left\{ \begin{pmatrix} -2 - \frac{1}{2}s + t \\ 2 - s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| \; s, t \in \mathbb{R} \right\}$.

30. Aufgabe: (1+1+2P) Für die Matrix $M = (m_{ij})_{i=1,\dots m, j=1,\dots n}$ schreiben wir abkürzend (m_{ij}), wobei wir immer die richtigen Wertebereiche der Indizes i, j im Hinterkopf behalten. Analog schreiben wir auch $M' = (m'_{ij})$.

a) Es gilt:

$$M + M' = (m_{ij}) + (m'_{ij}) = (m_{ij} + m'_{ij}) = (m'_{ij} + m_{ij}) = M' + M$$

b) Sei $M = (m_{ij})$. Dann definieren wir die Matrix $M' = (m'_{ij})$ indem wir setzen: $m'_{ij} := -m_{ij}$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$. Dann gilt: $M + M' = (m_{ij}) + (m'_{ij}) = (m_{ij} - m_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

c) Es gilt:

$$(a + b)M = \big((a + b)m_{ij}\big) = (am_{ij} + bm_{ij}) = (am_{ij}) + (bm_{ij}) = aM + bM$$

31. Aufgabe: (2+2P)

a) Seien $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ und betrachte die Linearkombination

$$a_1M_1 + a_2M_2 + a_3M_3 + a_4M_4 = O \quad \text{(Nullmatrix)}.$$

Für die expliziten Darstellungen der Matrizen ist dies äquivalent zu:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O.$$

Nach den Rechenregeln für Matrizen ist dies äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} &= O \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} &= O \\ \Leftrightarrow a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge a_3 = 0 \wedge a_4 &= 0. \end{aligned}$$

Somit sind die Matrizen M_1, M_2, M_3, M_4 linear unabhänging.

b) Sei $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ eine beliebige (2×2)-Matrix. Dann gilt: $M = m_{11}M_1 + m_{12}M_2 + m_{21}M_3 + m_{22}M_4$. Da die Matrizen M_1, M_2, M_3, M_4 linear unabhängig sind, sind die m_{ij} eindeutig festgelegt, d.h. es gibt keine Zahlen $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ so daß $M = a_1M_1 + a_2M_2 + a_3M_3 + a_4M_4$ und $a_1 \neq m_{11} \vee a_2 \neq m_{12} \vee a_3 \neq m_{21} \vee a_4 \neq m_{22}$.