Lineare Algebra I (WS 2004/05)

Lösungen 8. Übung

25. Aufgabe: (1+1+1P) Wir berechnen:
a) $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cdot 1 - 0\cdot(3+4\sqrt{2}) \\ 0\cdot\sqrt{3} - 1\cdot 1 \\ 1\cdot(3+4\sqrt{2}) - \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \langle \vec{a}\times\vec{b},\vec{c})\rangle = \sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3} + (-1)\cdot(-17) + 4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 3\cdot 3 + 17 + 8\cdot 2 = 42.$

b) $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 605 \end{pmatrix}$, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 104 + 605 = 709$ **c)** $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix}$, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 200\cdot 23,555 = 4711$

26. Aufgabe: (1+1+1+1P)
a) Durch komponentenweises Auswerten sieht man, daß die Gleichung $\lambda\vec{a} = \vec{c}$, für $\lambda \in \mathbb{R}$, keine Lösung hat, und somit $\vec{a}$ und $\vec{c}$ nicht parallel sind. Daraus folgt sofort, daß die Geraden G_1 und G_2 nicht parallel sind. Um zu zeigen, daß sich G_1 und G_2 nicht schneiden, setzen wir beide Geradengleichungen gleich:

$$r\vec{a} = \vec{b} + s\vec{c}$$

für $r, s \in \mathbb{R}$. Wir erhalten aus der Komponentendarstellung der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ die folgenden Gleichungen:

$$r = 1$$
$$s = 0 \tag{1}$$
$$s = 1 \tag{2}$$

und sehen, daß Gleichungen (1) und (2) nicht gleichzeitig erfüllt werden können, und somit gilt: $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.
b) $\vec{a}\times\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\parallel \vec{a}\times\vec{c} \parallel = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
c) Mithilfe der Koordinatendarstellungen von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ erhalten wir drei Gleichungen:

$$\alpha = 1$$
$$\frac{t}{\sqrt{2}} = \beta$$
$$\frac{t}{\sqrt{2}} = 1 - \beta,$$

mit Lösungen $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

27. Aufgabe: (1+2+2P) **a)** Skizze (klar)
b) Nachrechnen: sei $\vec{v}$ ein beliebiger Vektor, dann:

$$\begin{aligned}
S_E(S_E(\vec{v})) &= S_E(\vec{v} - 2\langle\vec{v},\vec{e}\rangle\vec{e}) && \text{nach Definition von } S_E \\
&= \big(\vec{v} - 2\langle\vec{v},\vec{e}\rangle\vec{e}\big) - 2\big\langle\big(\vec{v} - 2\langle\vec{v},\vec{e}\rangle\vec{e}\big),\vec{e}\big\rangle\vec{e} && \text{wiederum nach Definition von } S_E \\
&= \big(\vec{v} - 2\langle\vec{v},\vec{e}\rangle\vec{e}\big) - 2\Big(\langle\vec{v},\vec{e}\rangle - \big\langle 2\langle\vec{v},\vec{e}\rangle\vec{e},\vec{e}\big\rangle\Big)\vec{e} && \text{Bilinerität des Skalarprodukts} \\
&= \big(\vec{v} - 2\langle\vec{v},\vec{e}\rangle\vec{e}\big) - 2\big(\langle\vec{v},\vec{e}\rangle - 2\langle\vec{v},\vec{e}\rangle\langle\vec{e},\vec{e}\rangle\big)\vec{e} && \text{Bilinerität des Skalarprodukts} \\
&= \big(\vec{v} - 2\langle\vec{v},\vec{e}\rangle\vec{e}\big) - 2\big(\langle\vec{v},\vec{e}\rangle - 2\langle\vec{v},\vec{e}\rangle\big)\vec{e} && \text{da } \langle\vec{e},\vec{e}\rangle = 1 \\
&= \vec{v} - 2\langle\vec{v},\vec{e}\rangle\vec{e} - 2\langle\vec{v},\vec{e}\rangle\vec{e} + 4\langle\vec{v},\vec{e}\rangle\vec{e} \\
&= \vec{v}
\end{aligned}$$

c) *Behauptung:* die Menge aller Vektoren $\vec{v}$, für die gilt, daß $S_E(\vec{v}) = \vec{v}$ ist identisch mit der Menge aller Vektoren in E.
Beweis: Die Ebene E ist gegeben durch $\{\vec{v} \mid \langle \vec{v}, \vec{e} \rangle = 0\}$, d.h. $\vec{v} \in E \Leftrightarrow \langle \vec{v}, \vec{e} \rangle = 0$. Wir bezeichnen mit F die Menge aller Vektoren, für die gilt: $S_E(\vec{v}) = \vec{v}$. Wir wollen zeigen, daß $F = E$ gilt. Sei nun $\vec{v} \in F$, dann:

$$
\begin{aligned}
& S_E(\vec{v}) = \vec{v} \\
\Leftrightarrow \quad & \vec{v} - 2\langle \vec{v}, \vec{e} \rangle \vec{e} = \vec{v} && \mid -\vec{v} \\
\Rightarrow \quad & -2\langle \vec{v}, \vec{e} \rangle \vec{e} = \vec{0} \\
\Rightarrow \quad & \langle \vec{v}, \vec{e} \rangle \vec{e} = \vec{0} \\
\Rightarrow \quad & \langle \vec{v}, \vec{e} \rangle = 0 && \text{da } \vec{e} \neq \vec{0}.
\end{aligned}
$$

Somit gilt: $F \subset E$.

In umgekehrter Richtung sei $\vec{v} \in E$, dann gilt $\langle \vec{v}, \vec{e} \rangle = 0$, und somit

$$
\begin{aligned}
S_E(\vec{v}) &= \vec{v} - 2\langle \vec{v}, \vec{e} \rangle \vec{e} \\
&= \vec{v} - 2 \cdot 0 \cdot \vec{e} \\
&= \vec{v} - \vec{0} \\
&= \vec{v},
\end{aligned}
$$

und somit $E \subset F$, und insgesamt: $E = F$.

28. Aufgabe: (2+2P)
a) Im Falle $i = j$ folgt aus Aufgabe 27 **b)**, daß $S_i(S_j(\vec{v})) = S_j(S_i(\vec{v})) = S_i(S_i(\vec{v})) = \vec{v}$ für alle Vektoren $\vec{v}$. Im Falle $i \neq j$ ergibt direktes ausrechnen für einen beliebigen Vektor $\vec{v}$. :

$$
\begin{aligned}
S_i(S_j(\vec{v})) &= S_i(\vec{v} - 2\langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j) \\
&= \big(\vec{v} - 2\langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j\big) - 2\big\langle \vec{v} - 2\langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j, \vec{e}_i \big\rangle \vec{e}_i \\
&= \big(\vec{v} - 2\langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j\big) - 2\Big(\langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle - 2\big\langle \langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j, \vec{e}_i \big\rangle\Big) \vec{e}_i && \text{Bilinearität des Skalarproduktes} \\
&= \big(\vec{v} - 2\langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j\big) - 2\big(\langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle - 2\langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \langle \vec{e}_j, \vec{e}_i \rangle\big) \vec{e}_i && \text{Bilinearität des Skalarproduktes} \\
&= \big(\vec{v} - 2\langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j\big) - 2\big(\langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle - 2\langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \cdot 0\big) \vec{e}_i && \text{da } e_i,\ e_j \text{ orthogonal} \\
&= \vec{v} - 2\langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j - 2\langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i
\end{aligned}
$$

Eine analoge Rechnung ergibt:

$$S_j(S_i(\vec{v})) = \vec{v} - 2\langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i - 2\langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$$

und somit folgt:

$$S_j(S_i(\vec{v})) = S_i(S_j(\vec{v}))$$

für alle Vektoren $\vec{v}$.

b) Beachte zuerst, daß $\vec{v}$ in keiner der Ebenen E_i enthalten ist und somit $\vec{v} \neq 0$ und $S_i(\vec{v}) \neq \vec{v}$ für $i = 1, 2, 3$. Wir zeigen zunächst, daß für $i \neq j$ gilt: $S_i(\vec{v}) \neq S_j(\vec{v})$. Angenommen, es gilt $S_i(\vec{v}) = S_j(\vec{v})$, dann ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} & \vec{v} - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_i\rangle\vec{e}_i = \vec{v} - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j && \mid -\vec{v} \\ \Leftrightarrow \quad & -2\langle\vec{v}, \vec{e}_i\rangle\vec{e}_i = -2\langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j && |: -2 \\ \Leftrightarrow \quad & \langle\vec{v}, \vec{e}_i\rangle\vec{e}_i = \langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j \end{aligned}$$

d.h. die Aussage $S_i(\vec{v}) = S_j(\vec{v})$ ist äquivalent zur Aussage $\langle\vec{v}, \vec{e}_i\rangle\vec{e}_i = \langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j$. Da e_i, e_j orthogonal zueinander sind, insbesondere also linear unabhänging, und außerdem gilt $\langle\vec{v}, \vec{e}_i\rangle, \langle\vec{v}, \vec{e}_i\rangle \neq 0$ (da $\vec{v} \notin E_i, E_j$), ist letztere Aussage falsch. Also gilt $S_i(\vec{v}) \neq S_j(\vec{v})$.

Wir haben jetzt, zusätzlich zum Vektor $\vec{v}$ durch Spiegelung drei weitere, voneinander verschiedene Vektoren erhalten: $S_1(\vec{v})$, $S_2(\vec{v})$, und $S_3(\vec{v})$.

Wir betrachten nun die Vektoren $S_i(S_j(\vec{v}))$. Nach Aufgabe 27 **b)** gilt: $S_i(S_i(\vec{v}) = \vec{v}$ für alle i, wir erhalten also für $i = j$ keine neuen Vektoren. Für $i \neq j$ haben wir in Teil **a)** berechnet: $S_j(S_i(\vec{v})) = \vec{v} - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_i\rangle\vec{e}_i - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j$. Damit gilt:

$$\vec{v} - S_i(S_j(\vec{v})) = 2\langle\vec{v}, \vec{e}_i\rangle\vec{e}_i + 2\langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j \neq \vec{0},$$

d.h. $\vec{v} \neq S_i(S_j(\vec{v}))$, weiter:

$$S_i(\vec{v}) - S_i(S_j(\vec{v})) = 2\langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j \neq \vec{0},$$

und:

$$S_j(\vec{v}) - S_i(S_j(\vec{v})) = 2\langle\vec{v}, \vec{e}_i\rangle\vec{e}_i \neq \vec{0},$$

und für $k \neq i, j$:

$$S_k(\vec{v}) - S_i(S_j(\vec{v})) = 2\langle\vec{v}, \vec{e}_i\rangle\vec{e}_i + 2\langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_k\rangle\vec{e}_k \neq \vec{0},$$

wobei wir in allen Fällen benutzt haben, daß die e_i linear unabhängig sind und $\vec{v} \notin E_i$ für alle i. Da wegen Teil **a)** gilt $S_i(S_j(\vec{v}) = S_j(S_i(\vec{v})$, erhalten wir drei neue Punkte, nämlich $S_1(S_2(\vec{v}))$, $S_1(S_3(\vec{v}))$, und $S_2(S_3(\vec{v}))$, die verschieden sind von $\vec{v}$, $S_1(\vec{v})$, $S_2(\vec{v})$, und $S_3(\vec{v})$.

Nun betrachten wir Vektoren der Form $S_i(S_j(S_k(\vec{v})))$. Im Falle $i = j$ gilt nach Aufgabe 27 **b)**: $S_i(S_j(S_k(\vec{v}))) = S_i(S_i(S_k(\vec{v}))) = S_k(\vec{v})$. Im Falle $j = k$ gilt ebenso: $S_i(S_j(S_k(\vec{v}))) = S_i(S_j(S_j(\vec{v}))) = S_i(\vec{v})$. Für $i = k$ können wir nach Teil **a)** schreiben: $S_i(S_j(S_k(\vec{v}))) = S_i(S_j(S_i(\vec{v}))) = S_i(S_i(S_j(\vec{v})))$, womit wieder nach Aufgabe 27 **b)** gilt: $S_i(S_j(S_k(\vec{v}))) = S_j(\vec{v})$.

Somit sind nur Vektoren $S_i(S_j(S_k(\vec{v})))$ von Interesse, bei denen i, j, k paarweise verschieden sind. Es gilt (nach Rechnung):

$$S_i(S_j(S_k(\vec{v}))) = \vec{v} - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_i\rangle\vec{e}_i - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_k\rangle\vec{e}_k,$$

was offensichtlich nicht von der Anordnung von i, j, k abhängt, d.h. $S_1(S_2(S_3(\vec{v}))) = S_2(S_3(S_1(\vec{v}))) = S_3(S_2(S_1(\vec{v}))) = \cdots$. Wie oben rechnet man nach, daß $S_1(S_2(S_3(\vec{v}))) \neq S_i(S_j(\vec{v}))$ für $i \neq j$, $S_1(S_2(S_3(\vec{v}))) \neq S_i(\vec{v})$ und $S_1(S_2(S_3(\vec{v}))) \neq \vec{v}$.

Somit haben wir folgende Liste von paarweise verschiedenen Spiegelungsvektoren von $\vec{v}$:

$$\vec{v}, S_1(\vec{v}), S_2(\vec{v}), S_3(\vec{v}), S_1(S_2(\vec{v})), S_1(S_3(\vec{v})), S_2(S_3(\vec{v})), S_1(S_2(S_3(\vec{v}))).$$

Behauptung: diese Liste ist vollständig.
Beweis: Betrachte für vier Elemente $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ den Vektor $S_i(S_j(S_k(S_l(\vec{v}))))$. Da $\{1, 2, 3\}$ nur aus drei Elementen besteht, müssen mindestens zwei der i, j, k, l identisch sein. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß j, k, l paarweise verschieden sind, da wir sonst, wie oben gesehen, den Ausdruck $S_j(S_k(S_l(\vec{v})))$ durch einen kürzeren ersetzen könnten. Nun ist i identisch mit einem der Indizes j, k, l. Wir rechnen aus:

$$\begin{aligned}
S_i(S_j(S_k(S_l(\vec{v})))) =& S_i\big(\vec{v} - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_k\rangle\vec{e}_k - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_l\rangle\vec{e}_l\big) \\
=& \big(\vec{v} - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_k\rangle\vec{e}_k - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_l\rangle\vec{e}_l\big) \\
& - 2\Big(\big\langle\vec{v} - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_k\rangle\vec{e}_k - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_l\rangle\vec{e}_l, \vec{e}_i\big\rangle\vec{e}_i\Big) \\
=& \vec{v} - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_k\rangle\vec{e}_k - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_l\rangle\vec{e}_l \\
& - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_i\rangle\vec{e}_i + 4\langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\langle\vec{e}_j, \vec{e}_i\rangle\vec{e}_i + 4\langle\vec{v}, \vec{e}_k\rangle\langle\vec{e}_k, \vec{e}_i\rangle\vec{e}_i + 4\langle\vec{v}, \vec{e}_l\rangle\langle\vec{e}_l, \vec{e}_i\rangle\vec{e}_i
\end{aligned}$$

Für $i = j$ verschwinden die Skalarprodukte $\langle\vec{e}_k, \vec{e}_i\rangle$ und $\langle\vec{e}_l, \vec{e}_i\rangle$, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
S_i(S_j(S_k(S_l(\vec{v})))) &= \vec{v} - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_k\rangle\vec{e}_k - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_l\rangle\vec{e}_l \\
&= S_k(S_l(\vec{v})).
\end{aligned}$$

Analog, für $i = k$:

$$\begin{aligned}
S_i(S_j(S_k(S_l(\vec{v})))) &= \vec{v} - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_l\rangle\vec{e}_l \\
&= S_j(S_l(\vec{v})),
\end{aligned}$$

und für $i = l$:

$$\begin{aligned}
S_i(S_j(S_k(S_l(\vec{v})))) &= \vec{v} - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_j\rangle\vec{e}_j - 2\langle\vec{v}, \vec{e}_k\rangle\vec{e}_k \\
&= S_j(S_k(\vec{v})).
\end{aligned}$$

Somit folgt, daß jede Nacheinanderanwendung von 4 Spiegelungen äquivalent ist zu einer Nacheinanderanwendung von weniger als 4 Spiegelungen. Daraus wiederum folgt, daß obige Liste von Spiegelpunkten von $\vec{v}$ durch weitere Spiegelungen nicht mehr erweitert werden kann.