Lineare Algebra I (WS 2004/05)

Lösungshinweise und Ergebnisse für die Aufgaben 19 und 20

19. Aufgabe: $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

$$E_1 : \vec{x} = -\vec{v}_2 + r_1\vec{v}_1 + r_2(\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 7\vec{v}_3),$$
$$E_2 : \vec{x} = \vec{v}_3 + s_1(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 4\vec{v}_3) + s_2(\frac{4}{7}\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

Gleichsetzen $E_1 = E_2$ ergibt:

$$-\vec{v}_2 + r_1\vec{v}_1 + r_2(\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 7\vec{v}_3) = \vec{v}_3 + s_1(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 4\vec{v}_3) + s_2(\frac{4}{7}\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2).$$

Alles auf die linke Seite bringen und Zusammenfassen der Koeffizienten von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ergibt:

$$(r_1 + r_2 - 2s_1 - \frac{4}{7}s_2)\vec{v}_1 + (-1 + 3r_2 - s_1 - 2s_2)\vec{v}_2 + (7r_2 - 1 - 4s_1)\vec{v}_3 = 0.$$

Da $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind, müssen alle Koeffizienten verschwinden:

$$r_1 + r_2 - 2s_1 - \frac{4}{7}s_2 = 0 \tag{1}$$

$$-1 + 3r_2 - s_1 - 2s_2 = 0 \tag{2}$$

$$7r_2 - 1 - 4s_1 = 0. \tag{3}$$

Gleichung (3) is äquivalent zu:

$$r_2 = \frac{1}{7} + \frac{4}{7}s_1. \tag{4}$$

Einsetzen in (1) und (2) ergibt:

$$r_1 + \frac{1}{7} - \frac{10}{7}s_1 - \frac{4}{7}s_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7r_1 + 1 - 10s_1 - 4s_2 = 0. \tag{5}$$

$$-\frac{4}{7} + \frac{5}{7}s_1 - 2s_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_1 = \frac{4}{5} + \frac{14}{5}s_2. \tag{6}$$

Wir setzen (6) in (5) ein und erhalten:

$$7r_1 - 32s_2 - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = \frac{32}{7}s_2 + 1. \tag{7}$$

Einsetzen von (6) in (4) ergibt:

$$r_2 = \frac{3}{5} + \frac{8}{5}s_2. \tag{8}$$

Einsetzen von (7) und (8) in die Ebenengleichung E_1 ergibt:

$$\vec{x} = -\vec{v}_2 + (1 + \frac{32}{7}s_2)\vec{v}_1 + (\frac{3}{5} + \frac{8}{5}s_2)(\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 7\vec{v}_3)$$
$$\Leftrightarrow \quad \vec{x} = \frac{8}{5}\vec{v}_1 + \frac{4}{5}\vec{v}_2 + \frac{21}{5}\vec{v}_3 + s_2(\frac{216}{35}\vec{v}_1 + \frac{24}{5}\vec{v}_2 + \frac{56}{5}\vec{v}_3)$$

mit dem Parameter $s_2 \in \mathbb{R}$.

20. Aufgabe: $r, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$G_\lambda : \vec{x} = \vec{a} + r(b - \lambda\vec{c})$$

a) $r, s \in \mathbb{R}$.

$$E : \vec{x} = 4\vec{b} + s(\vec{a} + \vec{c}) + t(\vec{a} - \vec{c}).$$

Gleichsetzen $E = G_\lambda$ ergibt:

$$4\vec{b} + s(\vec{a} + \vec{c}) + t(\vec{a} - \vec{c}) = \vec{a} + r(\vec{b} - \lambda\vec{c}).$$

Alles auf die linke Seite bringen und Zusammenfassen der Koeffizienten von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ergibt:

$$(s + t - 1)\vec{a} + (4 - r)\vec{b} + (s - t + r\lambda)\vec{c} = 0.$$

Da $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig, ergeben sich für die Koeffizienten folgende Gleichungen:

$$s + t - 1 = 0, \tag{9}$$

$$4 - r = 0, \tag{10}$$

$$s - t + r\lambda = 0. \tag{11}$$

Gleichung (10) ergibt:

$$r = 4. \tag{12}$$

Einsetzen in die Geradengleichung ergibt:

$$S = G_\lambda : \vec{x} = \vec{a} + 4\vec{b} - 4\lambda\vec{c},$$

d.h. eine Geradengleichung in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$. Alternativ kann man (12) in (11) einsetzen:

$$s = t - 4\lambda. \tag{13}$$

Einsetzen von (13) in (9): $t = 2\lambda + \frac{1}{2}$. Wiederum einsetzen in (12): $s = \frac{1}{2} - 2\lambda$. Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$S = E : \vec{x} = \vec{a} + 4\vec{b} - 4\lambda\vec{c},$$

was natürlich das gleiche Ergebnis wie zuvor liefert.

b) $r, s \in \mathbb{R}$.

$$E : \vec{x} = 4\vec{b} + s(\vec{a} + \vec{b}) + t(\vec{a} - \vec{b}).$$

Die Gleichungen (analog wie in **a)**) sind:

$$s + t - 1 = 0$$

$$s - t - r = 0$$

$$1 - r\lambda = 0.$$

Lösen und einsetzen in die Gleichung für E ergibt analog wie in Teil **a)** für den Fall $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$:

$$\vec{x} = \vec{c} + \vec{a} - \frac{1}{\lambda}\vec{b}.$$

Dies ist keine Parameterdarstellung einer Geraden, da insbesondere $\frac{1}{\lambda}$ niemals den Wert 0 haben kann. Man kann sich veranschaulichen (z.B. durch Substition $\lambda \mapsto \eta$, wobei $\eta = \frac{1}{\lambda}$), daß die Menge T gegeben ist durch eine Gerade $\vec{x} = \vec{c} + \vec{a} - \eta\vec{b}$, $\eta \in \mathbb{R}$, jedoch *ohne* den Punkt $\vec{c} + \vec{a}$.