Lineare Algebra I (WS 2004/05)

Lösungen 13. Übung

44. Aufgabe: (2+1+1P)
a) Wir zeigen zunächst: sind a und b linear unabhängig, dann gilt: $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$. Da a und b linear unabhängig sind, gilt $a \neq 0_2$ und $b \neq 0_2$. Wir können also annehmen, daß entweder $\alpha_1 \neq 0$ oder $\alpha_2 \neq 0$; oBdA nehmen wir an, daß gilt: $\alpha_1 \neq 0$. Dann:

$$\beta_2 = \beta_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Es gilt:

$$\beta_1 a - \alpha_1 b = \beta_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da aber mindestens $\alpha_1 \neq 0$, ist dies ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von a und b.

Wir zeigen nun die umgekehrte, Richtung. Wenn gilt $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, dann gilt $a \neq 0_2$ und $b \neq 0_2$, und insbesondere gilt: $\alpha_1 \neq 0$ oder $\alpha_2 \neq 0$. Sei oBdA $\alpha_1 \neq 0$ und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ so, daß $\lambda a + \mu b = 0$. Dies ist äquivalent zu der Behauptung, daß λ und μ das folgende lineare Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Zeilenumformung erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da gilt $\beta_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\beta_1 \neq 0$ folgt, daß das Gleichungssystem die eindeutige Lösung $\lambda = \mu = 0$ besitzt, d.h. a und b sind linear unabhängig.

b) Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ so, daß $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$. Dies ist äquivalent dazu, daß $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ das folgende homogene Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0_2,$$

wobei die a_i die Spaltenvektoren der Matrix sind. Da der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ aber höchstens zwei ist, bedeutet dies, daß das Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt, d.h. die Vektoren a_1, a_2, a_3 sind linear abhängig.

c) Da $\mathbb{R}^2 \neq \emptyset$, muß jedes Erzeugendensystem – und insbesondere jede Basis – von $\mathbb{R}^2$ mindestens ein Element enthalten. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Angenommen $n > 2$, dann sind nach Teil **b)** mindestens drei Vektoren aus den v_i linear abhängig, was ein Widerspruchzur linearen Unabhängigkeit der $v_1, \ldots, v_n$ ist. Also gilt: $n \leq 2$.

Angenommen, es gilt $n = 1$, d.h. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}v_1$. Schreibe $v_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, dann ist leicht einzusehen, daß z.B. der Vektor $\begin{pmatrix} w_2 \\ -w_1 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von v_1 ist, also v_1 nicht ganz $\mathbb{R}^2$ erzeugt. Da $\mathbb{R}^2$ endlich erzeugt ist, besitzt $\mathbb{R}^2$ eine endliche Basis nach Satz 12.14 der Vorlesung, die somit die Länge 2 haben muß.

Bemerkung: Nachdem in der Vorlesung die Theorie weiterentwickelt worden ist, sind die Aufgaben b) und c) eine unmittelbare Folgerung aus (13.3) bzw. (13.4b), wenn man berücksichtigt, daß $\mathbb{R}^2$ eine zweielementige Basis besitzt, nämlich die kanonische Basis $\{e_1, e_2\}$.

45. Aufgabe: (3P)
Behauptung: die Menge $B := \{w_{i,i+1} \,|\, i = 1, 2, \dots, n-1\}$ ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $\{w_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.
Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die Menge B linear unabhängig ist. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ so daß $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i w_{i,i+1} = 0$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i w_{i,i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (v_i - v_{i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i - \sum_{i=2}^{n} \alpha_{i-1} v_i \\
&= \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) v_i + \alpha_{n-1} v_n
\end{aligned}
$$

Da die v_i linear unabhängig sind, folgt nach Koeffizientenvergleich: $\alpha_1 = \alpha_n = 0$ sowie $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ für $2 \leq i \leq n-2$. Daraus folgt, daß $0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$, also sind die $w_{i,i+1}$ linear unabhängig.

Nun zeigen wir, daß B eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $\{w_{ij}\}$ ist. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt eine linear unabhängige Menge B' mit $B \subset B' \subseteq \{w_{ij} \mid i < j\}$, die echt größer als B ist, d.h. es existiert ein $w_{ij} \in B' \setminus B$. Dann gilt: $|i - j| > 1$. Dieses w_{ij} können wir aber schreiben als Linearkombination der $w_{i,i+1}$, denn:

$$
\sum_{k=i}^{j-1} w_{k,k+1} = \sum_{k=i}^{j-1} (v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=i}^{j-1} v_k - \sum_{k=i+1}^{j} v_k = v_i + \sum_{k=i+1}^{j-1} (v_k - v_k) - v_j = v_i - v_j = w_{ij}.
$$

Somit haben wir einen Widerspruch zur linearen Unabängigkeit von B'.

Es folgt, daß B eine Basis des von den $\{w_{ij}\}$ erzeugten Untervektorraumes ist (Satz 12.13 aus der Vorlesung). qed

Wir ergänzen nun die Basis: *Behauptung:* $\{v_1\} \cup \{w_{i,i+1} | 1 \leq i < n\}$ ist eine Basis von V.
Beweis: Lineare Unabhängigkeit.Seien $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{R}$, so daß $\alpha v_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i w_{i,i+1} = 0$. Dann:

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha v_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i w_{i,i+1} \\
&= \alpha v_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i (v_{i+1} - v_i) \\
&= \alpha v_1 + \sum_{i=2}^{n} \beta_{i-1} v_i - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i v_i \\
&= \alpha v_1 + \beta_1 v_1 + \beta_{n-1} v_n + \sum_{i=2}^{n-1} (\beta_{i-1} - \beta_i) v_i.
\end{aligned}
$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der v_i folgt nun, daß $\beta_{n-1} = 0$ und $\beta_{i-1} = \beta_i$ für alle $1 < i < n$ und somit: $\beta_i = 0$ für alle $1 \leq i < n$. Mit $(\alpha + \beta_1) v_1 = 0$ und $\beta_1 = 0$ folgt somit auch $\alpha = 0$.

Um zu zeigen, daß die $v_1, w_{i,i+1}$ V erzeugen, genügt es zu zeigen, daß alle v_i in $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(v_1, w_{1,2}, \ldots, w_{n-1,n})$ enthalten sind. Im Falle $i = 1$ ist dies trivialerweise erfüllt. Sei $1 < i \leq n$, dann:

$$\begin{aligned} v_1 + \sum_{j=1}^{i} w_{j,j+1} &= v_1 + \sum_{j=1}^{i-1} (v_{j+1} - v_j) \\ &= v_1 + v_i - v_1 + \sum_{j=2}^{i-1} v_j - \sum_{j=2}^{i-1} v_j \\ &= v_i \end{aligned}$$

qed

46. Aufgabe: (2+1+2P)

a) Sei zunächst $b \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(a_1, \ldots, a_n)$, dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, so daß $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = b$. Es folgt also für jede Zeile ($1 \leq i \leq m$):

$$a_{i1}\lambda_1 + \cdots a_{in}\lambda_n = b_i,$$

wobei $a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$, d.h. inbesondere löst der Vektor $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_3 & = & b_m \end{array} \qquad (1)$$

Um die Rckrichtung zu zeigen, betrachte eine Lösung $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ des Gleichungssystems $Ax = b$. Dann gilt:

$$A\lambda = (a_1 \ldots a_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = b,$$

also $b \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\{a_1, \ldots, a_n\}$. qed.

b) Es gilt: $a_1, \ldots, a_n$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^m$ genau dann wenn $b \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\{a_1, \ldots, a_n\}$ für jedes $b \in \mathbb{R}^m$. Dies ist nach Teil **a)** wiederum äquivalent dazu, daß das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar ist. qed.

c) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ so daß $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0_m$. Durch explizites (komponentenweises) Umschreiben erhalten wir das Gleichungssystem (1) und sehen, daß die a_i linear unabhängig sind genau dann wenn (1) nur die triviale Lösung besitzt.

47. Aufgabe: (1+2P)

a) Wir testen die Untervektorraumaxiome $U1$, $U2$, $U3$ aus Def. 10.13 der Vorlesung. Betrachte zunächst den Untervektorraum U_1. Sind $f, g \in U_1$, dann gilt $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $f + g \in U_1 \Rightarrow U1$. Sei $0_V \in V$ die Nullfunktion, d.h. $0_V(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $0_V(-x) = 0 = -0_V(x)$, also $0_V \in U_1 \Rightarrow U2$. Sei $r \in \mathbb{R}$, $f \in U_1$, dann: $r \cdot f(-x) = r \cdot (-f(x)) = -\big(r \cdot f(x)\big)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $r \cdot f \in U_1 \Rightarrow U3$.

Wir betrachten nun U_2. Sind $f, g \in U_2$, dann gilt $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $f + g \in U_2 \Rightarrow U1$. Außerdem: $0_V(-x) = 0 = 0_V(x)$, also $0_V \in U_2 \Rightarrow U2$. Sei $r \in \mathbb{R}$, $f \in U_2$, dann: $r \cdot f(-x) = r \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $r \cdot f \in U_2 \Rightarrow U3$.

b) Sei $f \in V$ beliebig. Wir definieren $f^s, f^a \in V$ durch: $f^s(x) = f(x) + f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f^a(x) = f(x) - f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Behauptung: $f^a \in U_1$ und $f^s \in U_2$.

Beweis: $f^a(-x) = f(-x) - f(-(-x)) = f(-x) - f(x) = -\big(f(x) - f(-x)\big) = -f^a(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f^a \in U_1$.

$f^s(-x) = f(-x) + f(-(-x)) = f(-x) + f(x) = f(x) + f(-x) = f^s(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^a \in U_2$.

qed.

Es gilt: $f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x) + f(x) + f(-x)\big) = \frac{1}{2}\big(f^a(x) + f^s(x)\big)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $f = \frac{1}{2}(f^a + f^s)$. Daraus folgt, daß $V = U_1 + U_2$. Es bleibt zu zeigen, daß $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Wie in Teil **a)** schon gesehen, ist $0 = 0_V \in U_1 \cap U_2$. Sei nun $f \in U_1 \cap U_2$ beliebig, dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = -f(-x)$ und $f(x) = f(-x)$, d.h. $-f(-x) = f(-x)$, d.h. $f(-x) = 0$, also offensichtlich $f(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, d.h. $f = 0_V = 0$. qed.