Lineare Algebra I (WS 2004/05)

Lösungen 12. Übung

40. Aufgabe: (1+1+1+1P)
a) T ist ein Vektorraum.
Beweis: Wir zeigen, daß U_1, U_2, U_3 (s. Def. 10.13 aus der Vorlesung) gelten.
U_1: sind $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$ Lösungen von $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, dann gilt $v_1 + w_1 + v_2 + w_2 + v_3 + w_3 + v_4 + w_4 = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) = 0 + 0 = 0$.
U_2: der Nullvektor $0 \in \mathbb{R}^4$ ist offensichtlich in T.
U_3: ist $v \in T$ und $r \in \mathbb{R}$, dann gilt: $0 = r \cdot (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = rv_1 + rv_2 + rv_3 + rv_4$, also ist auch $r \cdot v \in T$.
qed

b) T enthält nicht den Nullvektor und ist somit kein Untervektorraum.

c) T ist ein Vektorraum.
Beweis: Wir zeigen, daß U_1, U_2, U_3 (s. Def. 10.13 aus der Vorlesung) gelten.
U_1: betrachte zwei Elemente $v, w \in T$. Dann gilt: $v_1 + w_2 + v_2 + w_2 = (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) = 0 + 0 = 0$ und $v_3 + w_3 + v_4 + w_4 = (v_3 + w_3) + (v_4 + w_4) = 0 + 0 = 0$, also ist auch $v + w \in T$.
U_2: der Nullvektor erfüllt offensichtlich die Bedingung für T.
U_3: Sei nun $v \in T$ und $r \in \mathbb{R}$, dann gilt: $rv_1 + rv_2 = r(v_1 + v_2) = r \cdot 0 = 0$ und $rv_3 + rv_4 = r(v_3 + v_4) = r \cdot 0 = 0$, also ist auch $r \cdot v \in T$.
qed

d) T ist kein Untervektorraum. z. B. sind $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthalten in T, aber für $v + w$ gilt: $\big(v_1 + w_1 - (v_2 + w_2)\big)\big(v_3 + w_3 - (v_4 + w_4)\big) = (1 - 2)(2 - 1) = -1 \cdot 1 = -1$, d.h. $v + w \notin T$.

41. Aufgabe: $(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\text{P})$

a) Fallunterscheidung: 1. $E = \emptyset$, dann ist $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E) = \{0\} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(F)$. 2. $E \neq \emptyset$. Sei $u \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$. Dann ist u eine endliche Linearkombination von Elementen in E; da eine endliche Linearkombination von Elementen in E auch eine endliche Linearkombination von Elementen in F ist, ist somit $u \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(F)$.

b) Wir zeigen zunächst $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E) \subseteq \sum_{v \in E} \mathbb{R}v$. Sei $u \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$, dann ist $u = \sum_{v \in I} \alpha_v v$, wobei $I \subseteq E$ eine endliche Teilmenge ist. Für jedes $v \in I$ ist $\alpha_v v \in \mathbb{R}v$, und somit ist $u \in \sum_{v \in I} \mathbb{R}v$ und nach Teil **a)** folgt aus $I \subseteq E$, daß $u \in \sum_{v \in E} \mathbb{R}v$.

Nun zeigen wir die umgekehrte Inklusion. Sei $u \in \sum_{v \in E} \mathbb{R}v$, dann ist $u = \sum_{v \in I} w_v$ für eine endliche Teilmenge $I \subseteq E$ und $w_v \in \mathbb{R}v$. Dann gilt für jedes $v \in I$, daß $w_v = \alpha_v v$ für $\alpha_v \in \mathbb{R}$ und somit ist u eine endliche Linearkombination von Elementen in E, also $u \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$.

c) Die Inklusion $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E))$ ist offensichtlich. Sei nun $u \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E))$, dann gilt $u = \sum_{v \in I} \alpha_v v$, wobei $I \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$ eine endliche Teilmenge und jedes $v \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$. Dann gilt für jedes $v \in E$, daß $v = \sum_{w \in J_v} \beta_{wv} w$ wobei $J_v \subseteq E$ und $\beta_{wv} \in \mathbb{R}$ für jedes $v \in I$. Somit gilt:

$$u = \sum_{v \in I} \alpha_v \Big(\sum_{w \in J_v} \beta_{wv} w \Big) = \sum_{v \in I} \Big(\sum_{w \in J_v} \alpha_v \beta_{wv} w \Big) = \sum_{v \in I} \sum_{w \in J_v} (\alpha_v \beta_{wv}) w,$$

d.h. u ist eine endliche Linearkombination von Elementen in E.

d) Sei zunächst $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Die Inklusion $U \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U)$ ist offensichtlich. Sei nun $u \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U)$, dann $u = \sum_{v \in I} \alpha_v v$ für eine endliche Teilmenge $I \subseteq U$, und es folgt mit Aufgabe **38 b)**, daß $u \in U$, d.h. $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U) \subseteq U$.

Sei nun umgekehrt $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U) = U$. Nach (11.9) der Vorlesung ist $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U)$ ein Untervektorraum, damit ist auch U ein Untervektorraum. qed

Hier noch einmal ein Beweis dafür, daß $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U)$ ein Untervektorraum von V ist:

Ist $u = \sum_{v \in I} \alpha_v v \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U)$ für eine endliche Teilmenge $I \subseteq U$, dann ist auch $0 = 0 \cdot u = 0 \cdot \sum_{v \in I} \alpha_v v = \sum_{v \in I} 0 \cdot \alpha_v v \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U)$ und somit erfüllt $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U)$ U_2.

Seien nun $u, w \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U)$ mit $u = \sum_{v \in I} \alpha_v v$ und $w = \sum_{v \in J} \beta_v v$ mit $I, J \subseteq U$ endliche Teilmengen. Wir setzen $K := I \cup J$ und schreiben $u = \sum_{v \in K} \alpha_v v$ und $w = \sum_{v \in K} \beta_v v$, wobei wir setzen $\alpha_v = 0$ für $v \in K \setminus I$ and $\beta_v = 0$ für $v \in K \setminus J$. Dann gilt: $u + w = \sum_{v \in K} \alpha_v v + \sum_{v \in K} \beta_v v = \sum_{v \in K} (\alpha_v + \beta_v) v \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U)$, d.h. U_1 gilt. für $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U)$.

Für $u = \sum_{v \in I} \alpha_v v \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U)$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt: $r \cdot u = r \cdot \sum_{v \in I} \alpha_v v = \sum_{v \in I} r \cdot \alpha_v v \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U)$, d.h. U_3 gilt. qed

Alternative Lösung von Aufgabe 41

Benutzt man Satz (11.10a) der Vorlesung, der besagt, daß $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$ der kleinste Untervektorraum von V ist, der E umfaßt, so läßt sich auch folgendermaßen argumentieren:

a) Wegen $E \subseteq F \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(F)$ ist $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(F)$ ein Untervektorraum von V, der E umfaßt, also $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(F)$.

b) $S := \sum_{v \in E} \mathbb{R} v$ ist ein Untervektorraum von V mit $E \subseteq S$. Folglich $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E) \subseteq S$.

$S \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$ wird wie oben bewiesen.

d) "$\Longrightarrow$" U sei ein Untervektorraum von V. Wegen $U \subseteq U$ folgt dann $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U) \subseteq U$. Da $U \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U)$ immer gilt, folgt die Behauptung $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U) = U$.

"$\Longleftarrow$" Klar, da $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U)$ ein Untervektorraum von V ist.

c) $U := \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$ ist ein Untervektorraum von V. Nach d) gilt $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U) = U$, also $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)) = \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$.

42. Aufgabe: (2+2P)
Vorbemerkung: in beiden Fällen ist die Nullmatrix offensichtlich in T enthalten, so daß wir das Untervektorraumaxiom U_2 nicht mehr explizit nachprüfen.

a) U_1 : $A, B \in T$, $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$. Dann: $a_{21} + b_{21} = a_{12} + b_{12}$, also $A + B \in T$.

U_3: Für $r \in \mathbb{R}$ und $A \in T$ gilt: $ra_{21} = ra_{12} \Rightarrow r \cdot A \in T$.

Behauptung: Die folgenden Matrizen sind linear unabhängig und jede Matrix aus T läßt sich als Linearkombination von diesen Matrizen darstellen:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis: Lineare Unabhängigkeit: seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ so daß $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 = 0$, dann gilt komponentenweise: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ und $\alpha_3 = 0$, d.h. die Matrizen E_1, E_2, E_3 sind linear unabhängig.

Darstellung der Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \in T$: wir setzen $\alpha_1 = a_{11}, \alpha_2 = a_{22}, \alpha_3 = a_{12}$, dann gilt: $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i E_i = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) = A$, da $a_{12} = a_{21}$.

b) U_1 : $A, B \in T$, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ und $a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} \Rightarrow A + B \in T$.
U_3: $A \in T, r \in \mathbb{R} \Rightarrow r \cdot A = (r \cdot a_{ij})$ und $ra_{ij} = ra_{ji} \Rightarrow r \cdot A \in T$.

Wir betrachten die Menge der im Matrizenraum $M_{n,n}(\mathbb{R})$ linear unabhängigen Elemente $E_{ij} = (e^{ij}_{kl})$, wobei $e^{ij}_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = k \text{ und } k = l \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$.
Für $i = 1, \ldots, n$ setzen wir $E_i := E_{ii}$.
Für alle $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i < j$ setzen wir $F_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$.
Behauptung: Die Matrizen E_i, F_{ij} gehören zu T und sind linear unabhängig, und jede Matrix aus T läßt sich als Linearkombination von diesen Matrizen darstellen.
Beweis: Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i < j \leq n$, so daß $\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij} F_{ij} = 0$. Dann folgt sofort komponentenweise, daß $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ und $\beta_{ij} = 0$ für alle $1 \leq i < j \leq n$, also sind die Matrizen E_i, F_{ij} linear unabhängig.

Sei nun $A = (a_{ij}) \in T$, dann setzen wir $\alpha_i := a_{ii}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\beta_{ij} := a_{ij}$ für $1 \leq i < j \leq n$. Es folgt, daß $A = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij} F_{ij}$, da $a_{ij} = a_{ji}$ für $i < j$. qed

43. Aufgabe: (2P)
Die Addition und Skalarmultiplikation auf $V \times W$ ist wie folgt definiert: seien $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times W$, dann ist $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$, und für $(v, w) \in V \times W$ und $r \in \mathbb{R}$ ist $r \cdot (v, w) := (r \cdot v, r \cdot w)$. Wir prüfen nun die Axiome (A0)-(A4) und (SM0)-(SM4) aus Def. 4.3 der Vorlesung nach. Seien $(v_1, w_1), (v_2, w_2), (v_3, w_3) \in V \times W$ und $r, s \in \mathbb{R}$.

(A0): $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \in V \times W$

(A1): $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) = (v_2 + v_1, w_2 + w_1) = (v_2, w_2) + (v_1, w_1)$.

(A2): $(v_1, w_1) + \big((v_2, w_2) + (v_2, w_2)\big) = (v_1, w_1) + (v_2 + v_3, w_2 + w_3) = \big(v_1 + (v_2 + v_3), w_1 + (w_2 + w_3)\big) = \big((v_1 + v_2) + v_3, (w_1 + w_2) + w_3\big) = \big((v_1, w_1) + (v_2, w_2)\big) + (v_3, w_3)$.

(A3): Das Nullelement ist gegeben durch $(0, 0) \in V \times W$: $(0, 0) + (v_1, w_1) = (0 + v_1, 0 + w_1) = (v_1, w_1)$ und $(v_1, w_1) + (0, 0) = (v_1 + 0, w_1 + 0) = (v_1, w_1)$.

(A4): Das Negative ist gegeben durch die Negativen der Komponenten: $-(v_1, w_1) := (-v_1, -w_1)$. Dann gilt: $(v_1, w_2) + \big(-(v_1, w_2)\big) = (v_1 - v_1, w_1 - w_1) = (0, 0)$.

(SM0): $r(v_1, w_1) = (rv_1, rw_1) \in V \times W$

(SM1): $r\big((v_1, w_1) + (v_2, w_2)\big) = r(v_1 + v_2, w_1 + w_2) = (rv_1 + rv_2, rw_1 + rw_2) = (rv_1, rw_1) + (rv_2, rw_2) = r(v_1, w_1) + r(v_2, w_2)$.

(SM2): $(r + s)(v_1, w_1) = \big((r + s)v_1, (r + s)w_1\big) = (rv_1 + sv_1, rw_1 + sw_1) = r(v_1, rw_1) + s(v_1, w_1)$.

(SM3): $r\big(s(v_1, w_1)\big) = r(sv_1, sw_1) = (rsv_1, rsw_1) = (rs)(v_1, w_1)$.

(SM4): $1 \cdot (v_1, w_1) = (1v_1, 1w_1) = (v_1, w_1)$.