Lineare Algebra I (WS 2004/05)

Lösungen 11. Übung

36. Aufgabe: (3P) Durch elementare Zeilenumformungen wird die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b) \in \mathrm{M}_{6,8}(\mathbb{R})$ auf Treppenform T gebracht (das Ergebnis ist eindeutig!):

$$T := \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 7 & 2 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die charakteristischen Indizes sind 1,3,6 und 7. Durch Einfügen und/oder Löschen von Nullzeilen wird aus T eine (7×8)–Matrix B gebildet, so daß die Einsen der Einheitsvektoren zu den Indizes 1,3,6 und 7 jetzt auf der Hauptdiagonale von B stehen:

$$B := \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 7 & 2 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Ersetze die Nullen der Hauptdiagonale von B durch -1:

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 2 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die drei Spalten von C, in die -1 eingesetzt wurde, sollen der Reihe nach mit v_1, v_2, v_3 bezeichnet werden, die letzte Spalte von C mit u. Nach Satz (10.26) ist dann u eine spezielle Lösung von $Ax = b$ (d.h. $Au = b$), und die Spalten v_1, v_2, v_3 bilden eine Basis des Lösungsraumes des zugehörigen homogenen LGS's $Ax = o_6$, und es gilt:

$$\text{Lös}(A,b) \;=\; \{\, u + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \,|\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \,\}$$

$$\text{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 9\\0\\7\\0\\0\\5\\0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 7\\0\\3\\-1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2\\0\\2\\0\\-1\\0\\0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

37. Aufgabe: (2+2+2P)
a) Das Gleichungssystem G_1 kann durch elementare Zeilenumformungen in das Gleichungssystem G_1 umgeformt werden. Die zweite Zeile von G_2 erhält man, indem man das siebenfache der dritten Zeile von G_1 auf die zweite von G_1 addiert. Die dritte Zeile von G_2 erhält man, indem man die erste von der dritten Zeile in G_1 subtrahiert. Somit haben G_1 und G_2 die gleiche Lösungsmenge.
b) Wir formen zunächst G_1 um, indem wir die dritte Zeile auf die erste Zeile addieren, und wir erhalten:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 12x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 12 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 7x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 11 \end{array}$$

Dann ziehen wir die erste Zeile multipliziert mit $\frac{1}{3}$ von der zweiten Zeile ab, und die ziehen wir die erste Zeile multipliziert mit $\frac{7}{12}$ von der dritten Zeile ab. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 12x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 12 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & = & 0 \\ & & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{4}x_3 & = & 4. \end{array}$$

Wir formen nun G_2 um. Nach Addition der dritten auf die zweite Zeile bekommen wir:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 12x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 12 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & = & 0 \\ -\frac{5}{2}x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & - & 2x_3 & = & -\frac{1}{2}. \end{array}$$

Wir multiplizieren die dritte Zeile mit 2:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 12x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 12 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & = & 0 \\ -5x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & = & -1 \end{array}$$

und addieren das $\frac{5}{12}$-fache der ersten Zeile auf die dritte Zeile:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 12x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 12 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & = & 0 \\ & & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{4}x_3 & = & 4. \end{array}$$

Somit haben wir G_1 und G_2 in dasselbe Gleichungssystem überführt, und somit haben beide Gleichungssysteme dieselbe Lösungsmenge.

c) Wir formen zunächst G_1 um; wir subtrahieren das 4-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile und das 7-fache der ersten Zeile von der dritten:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & -3x_2 & - & 6x_3 & = & -11 \\ & & -6x_2 & - & 12x_3 & = & -22. \end{array}$$

Wir subtrahieren das 2-fache der zweiten von der dritten Zeile:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & -3x_2 & - & 6x_3 & = & -11, \end{array}$$

d.h. G_1 ist unterbestimmt mit einem freien Parameter.

Betrachten wir nun G_2. Wir subtrahieren das 4-fache der zweiten Zeile von der ersten Zeile und das 7-fache der zweiten Zeile von der dritten:

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & -3x_2 & + & 2x_3 & = & -10 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & -6x_2 & + & 2x_3 & = & -23. \end{array}$$

Wir subtrahieren das 2-fache der ersten von der dritten Zeile:

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & -3x_2 & + & 2x_3 & = & -10 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & & & -2x_3 & = & -3. \end{array}$$

Das Gleichungssystem G_2 hat also genau eine Lösung und ist somit nicht äquivalent zu G_1.

38. Aufgabe: (1+2+2P)

a) Induktionsanfang: $n = 1$, dann gilt: $r \cdot \sum_{i=1}^{1} v_i = r \cdot v_1 = \sum_{i=1}^{1} r \cdot v_i$. Sei nun $n > 1$, dann: $r \cdot \sum_{i=1}^{n} v_j = r \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} v_j + v_n \right) = r \cdot \sum_{i=1}^{n-1} v_j + r \cdot v_n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist nun: $r \cdot \sum_{i=1}^{n-1} v_j + r \cdot v_n = \sum_{i=1}^{n-1} r \cdot v_j + r \cdot v_n = \sum_{i=1}^{n} r \cdot v_j$.

b) Zuerst nehmen wir an, daß U ein Untervektorraum ist. Für $n = 1$ gilt dann nach Axiom U_3 (Definition 10.13): $\alpha_1 \cdot v_1 \in U$. Für $n > 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i + \alpha_n v_n$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt: $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \in U$; weiterhin gilt, da U Untervektorraum: $\alpha_n v_n \in U$, und somit nach Axiom U_1: $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in U$.

Umgekehrt gelte, daß für alle $v_1, \ldots, v_n \in U$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ auch $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in U$. Dann betrachten wir folgende Spezialfälle: für $n = 1$ gilt $\alpha_1 v_1 \in U$ für alle $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ und alle $v_1 \in U$, was äquivalent ist zu U_3. Wählt man $\alpha_1 = 0$, folgt, daß der Nullvektor in U enthalten und somit U_2 erfüllt ist. Für $n = 2$ seien $v_1, v_2 \in U$, dann gilt für $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, so daß gilt: $v_1 + v_2 \in U$. Somit ist U_1 erfüllt.

c) Induktionsanfang: für $r = 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Betrachten wir jetzt den Fall $r = 2$. Wir schreiben explizit für $Ax = b$:

$$\begin{array}{rcccrcrcccrcr} a^1_{11} x_1 & + & \cdots & + & a^1_{1n_1} x_{n_1} & + & 0 \cdot x_{n_1+1} & + & \cdots & + & 0 \cdot x_{n_1+n_2} & = & b_{11} \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\ a^1_{m_1 1} x_1 & + & \cdots & + & a^1_{m_1 n_1} x_{n_1} & + & 0 \cdot x_{n_1+1} & + & \cdots & + & 0 \cdot x_{n_1+n_2} & = & b_{1m_1} \\ 0 \cdot x_1 & + & \cdots & + & 0 \cdot x_{n_1} & + & a^2_{11} \cdot x_{n_1+1} & + & \cdots & + & a^2_{1n_2} x_{n_1+n_2} & = & b_{21} \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 \cdot x_1 & + & \cdots & + & 0 \cdot x_{n_1} & + & a^2_{m_2 1} \cdot x_{n_1+1} & + & \cdots & + & a^2_{m_2 n_2} x_{n_1+n_2} & = & b_{m_2 1} \end{array}$$

wobei $A_1 = (a^1_{ij})$, $A_2 = (a^2_{ij})$. Setzt man nun den Vektor y ein, dann hat man für die ersten m_1 Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a^1_{11}y_{11} & + & \cdots & + & a^1_{1n_1}y_{1n_1} & + & 0\cdot y_{21} & + & \cdots & + & 0\cdot y_{2n_2} & = & b_{11} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
a^1_{m_1 1}y_{11} & + & \cdots & + & a^1_{m_1 n_1}y_{1n_1} & + & 0\cdot y_{21} & + & \cdots & + & 0\cdot y_{2n_2} & = & b_{2m_1}
\end{array}$$

und für die Zeilen m_1+1 bis m_1+m_2:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0\cdot y_{11} & + & \cdots & + & 0\cdot y_{1n_1} & + & a^2_{11}y_{21} & + & \cdots & + & a^2_{1n_2}y_{2n_2} & = & b_{21} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0\cdot y_{11} & + & \cdots & + & 0\cdot y_{1n_1} & + & a^2_{m_2 1}y_{21} & + & \cdots & + & a^2_{m_2 n_2}y_{2n_2} & = & b_{2m_2}
\end{array}$$

Wir sehen also, daß y eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ist.

Sei nun $r > 2$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{r-1,n_{r-1}} \end{pmatrix}$ Lösung des Gleichungssystems $A'x = b'$, wobei $A' = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & & A_{r-1} \end{pmatrix}$ und $b' = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{r-1,n_{r-1}} \end{pmatrix}$. Wir wenden nun den Fall $r = 2$ an für die Gleichungssysteme $A'x = b'$ und $A_r x = b_r$, und wir erhalten so, daß $y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{rn_r} \end{pmatrix}$ eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ist.

39. Aufgabe: (5P)

(A) Wir zeigen zunächst folgende verallgemeinerte Dreiecksungleichung: Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt: $|\sum_{i=1}^n x_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i|$.
Beweis: durch vollständige Induktion. Im Falle $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich wahr. Unten werden wir benutzen, daß der Fall $n = 2$ bereits in der Vorlesung bewiesen wurde. Sei nun $n > 1$ und gelte $|\sum_{i=1}^{n-1} y_i| \le \sum_{i=1}^{n-1} |y_i|$ für alle $y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Wir haben

$$\begin{aligned}
|\sum_{i=1}^{n} x_i| &= |\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n| \\
&\le |\sum_{i=1}^{n-1} x_i| + |x_n| \qquad \text{nach Dreiecksungleichung} \\
&\le \sum_{i=1}^{n-1} |x_i| + |x_n| \qquad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i|.
\end{aligned}$$

qed.

(B) Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ und $x_i \leq y_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt: $\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n y_i$.
Beweis: durch vollständige Induktion. Im Falle $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich wahr. Sei nun $n > 1$, dann gilt $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} y_i + x_n$ nach Induktionsvoraussetzung. Weiterhin gilt nach Axiom O_A (Definition 1.5 aus der Vorlesung): $\sum_{i=1}^{n-1} y_i + x_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n = \sum_{i=1}^n y_i$, und somit folgt die Behauptung. qed.

Betrachten wir nun das Gleichungssystem. Da das dieses homogen ist, ist der Nullvektor $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ offensichtlich eine mögliche Lösung. Nun betrachte eine beliebige Lösung $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, die vom Nullvektor verschieden ist. Wir wählen $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ so, daß $|z_{k_0}|$ maximal ist. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
0 &= |\sum_{i=1}^n a_{k_0 i} z_i| \\
&= |\sum_{i=1}^n a_{k_0 i} z_i| \\
&= |\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k_0}}^n a_{k_0 i} z_i + a_{k_0 k_0} z_{k_0}| \\
&\geq |a_{k_0 k_0} z_{k_0}| - |\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k_0}}^n a_{k_0 i} z_i| \quad \text{siehe Hinweis in der Aufgabe} \\
&\geq |a_{k_0 k_0} z_{k_0}| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k_0}}^n |a_{k_0 i} z_i| \quad \text{nach } \textbf{(A)} \\
&= |a_{k_0 k_0} z_{k_0}| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k_0}}^n |a_{k_0 i}||z_i| \\
&\geq |a_{k_0 k_0} z_{k_0}| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k_0}}^n |a_{k_0 i}||z_{k_0}| \quad \text{nach } \textbf{(B)}\text{, da } |z_i| \leq |z_{k_0}| \text{ für alle } i \\
&= \Big(|a_{k_0 k_0}| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k_0}}^n |a_{k_0 i}|\Big)|z_{k_0}|
\end{aligned}
$$

Nach Voraussetzung ist $|a_{k_0 k_0}| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k_0}}^n |a_{k_0 i}| > 0$ und somit $0 \geq \Big(|a_{k_0 k_0}| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k_0}}^n |a_{k_0 i}|\Big)|z_{k_0}| > 0$, und somit erhalten wir einen Widerspruch zu der Annahme $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \neq 0$.