Lineare Algebra I (WS 2004/05)

Lösungen 10. Übung

32. Aufgabe: (2P)
Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $n = 1$. In diesem Fall ist nur der Vektor $v_1 = (v_1^1)$ definiert, wobei $v_1^1 = 1$. v_1 ist somit offensichtlich ungleich dem Nullvektor und somit linear unabhängig. Ebenso offensichtlich sind alle Elemente des $\mathbb{R}^1$ als Vielfaches von v_1^1.

2. Fall: $n > 1$. Seien $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ gegeben, so daß gilt: $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots \alpha_n \cdot v_n = 0$. Dann gilt komponentenweise:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i^j = 0$$

für jedes $j = 1, \dots, n$. Da gilt $v_i^j = 0$ für $j \notin \{i, i+1\}$ und $v_i^i = v_i^{i+1} = 1$ für $i < n$, sowie $v_n^j = 0$ für $j \neq n$ und $v_n^n = 1$, erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\alpha_1 = 0$$

und

$$\alpha_i + \alpha_{i+1} = 0$$

für alle $i = 1, \dots, n-1$. Für jedes $1 < k \leq n$ betrachten wir:

$$\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} (\alpha_i + \alpha_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \cdot 0 = 0.$$

Wir formen um:

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} (\alpha_i + \alpha_{i+1}) &= \sum_{i=1}^{k-1} \left((-1)^{i+1} \alpha_i + (-1)^{i+1} \alpha_{i+1} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \alpha_{i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \alpha_i + \sum_{i=2}^{k} (-1)^{i} \alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \alpha_i - \sum_{i=2}^{k} (-1)^{i+1} \alpha_i \\
&= \alpha_1 + \sum_{i=2}^{k-1} (-1)^{i+1} (\alpha_i - \alpha_i) - (-1)^k \alpha_k \\
&= \alpha_1 + \sum_{i=2}^{k-1} (-1)^{i+1} \cdot 0 - (-1)^k \alpha_k \\
&= \alpha_1 - (-1)^k \alpha_k.
\end{aligned}$$

Da $\alpha_1 = 0$ folgt somit $\alpha_k = 0$ für jedes k mit $1 < k \leq n$, und somit die lineare Unabhängingkeit der v_i.

Sei $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ ein beliebiges Element. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gegeben so daß $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = y$. Dann gilt komponentenweise:

$$\alpha_1 = y_1$$

und

$$\alpha_i + \alpha_{i+1} = y_{i+1}$$

für alle $1 \leq j < n$. Ähnlich wie oben gilt dann für jedes $1 < k \leq n$:

$$\sum_{i=2}^{k} (-1)^i y_i = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} (\alpha_i + \alpha_{i+1}) = \alpha_1 - (-1)^k \alpha_k,$$

also: $\alpha_k = (-1)^k \sum_{i=1}^k (-1)^i y_i$, da $\alpha_1 = v_1$. Somit folgt: ist y eine Linearkombination der v_i, dann sind die Koeffizienten α_i eindeutig festgelegt. Umgekehrt, für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ setzt man $\alpha_1 = y_1$ und $\alpha_k = (-1)^k \sum_{i=1}^k (-1)^i y_i$. Dann folgt aus $\alpha_k + \alpha_{k+1} = (-1)^k \sum_{i=1}^k (-1)^i y_i + (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i y_i = y_{k+1}$, daß y eine Linearkombination der v_i ist.

33. Aufgabe: (3P) Wir formen zunächst das Gleichungssystem um. Zuerst addieren wir die erste auf die dritte Zeile:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & -x_2 & - & (1+\lambda)x_3 & - & x_4 & = & -\mu \end{array}$$

Dann die zweite auf die dritte:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & & & (1-\lambda)x_3 & & & = & 2-\mu \end{array}$$

Wir unterscheiden nun folgende Fälle:
1. Ist $\lambda = 1$ und $\mu \neq 2$, lautet die dritte Zeile: $0 \cdot x_3 = 2 - \mu$, wobei $2 - \mu \neq 0$. Diese Gleichung ist für kein $x_3 \in \mathbb{R}$ erfüllbar, und somit hat das Gleichungssystem keine Lösung.
2. Ist $\lambda = 1$ und $\mu = 2$, können wir die dritte Zeile vergessen und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Wir definieren die Parameter $r, s \in \mathbb{R}$ als: $r := x_3$, $s = x_4$ und erhalten so die Lösungsmenge $L = \{ \binom{x_1}{x_2} = \binom{-2}{2} + r \binom{3}{-2} + s \binom{1}{-1} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$.
3. Gilt $\lambda \neq 1$ und μ beliebig, dann haben wir:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & & & x_3 & & & = & \frac{2-\mu}{1-\lambda} \end{array}$$

Mit $x_4 =: r \in \mathbb{R}$ als freien Parameter bekommen wir: $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4+2\lambda-3\mu}{1-\lambda} \\ 2(\frac{\mu-\lambda-1}{1-\lambda}) \\ \frac{2-\mu}{1-\lambda} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$.

34. Aufgabe: (2+2+2P)

a) Zu zeigen: die Untervektorraumaxiome (U1), (U2), (U3) gelten für $U_1 \cap U_2$.
Zu (U1): seien $x, y \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt sowohl $x + y \in U_1$ als auch $x + y \in U_2$, da sowohl U_1 als auch U_2 Untervektorräume von V sind.
Zu (U2): da sowohl $0 \in U_1$ als auch $0 \in U_2$, gilt auch: $0 \in U_1 \cap U_2$.
Zu (U3): sei $x \in U_1 \cap U_2$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $rx \in U_1$ und $rx \in U_2$, da U_1, U_2 bereits Untervektorräume von V. Also: $rx \in U_1 \cap U_2$.

b) Zu U1: seien $x, y \in U_1 + U_2$, dann lassen sich x und y schreiben als $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, wobei $x_1, y_1 \in U_1$, $x_2, y_2 \in U_2$. Dann gilt: $x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$, und somit $x + y \in U_1 + U_2$.
Zu U2: $0 \in U_1$ und $0 \in U_2$, somit $0 + 0 = 0 \in U_1 + U_2$.
Zu U3: sei $x \in U_1 + U_2$, so daß $x = x_1 + x_2$, wobei $x_1 \in U_1$ und $x_2 \in U_2$. Sei $r \in \mathbb{R}$, dann gilt: $r \cdot x = r \cdot (x_1 + x_2) = rx_1 + rx_2$. Mit $rx_1 \in U_1$ und $rx_2 \in U_2$ folgt $rx_1 + rx_2 \in U_1 + U_2$.

c) Sei $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von V. Angenommen, es existiert ein $x \in U_1 \setminus U_2$. Angenommen, es existiert ein $y \in U_2$ mit $x + y \in U_2$, dann folgt: $x = (x + y) - y \in U_2$, ein Widerspruch. Also folgt, daß $x + y \in U_1$ für jedes $y \in U_2$. Somit folgt, daß $y = (x + y) - x \in U_1$ und somit $U_2 \subset U_2$. Analog zeigt man, existiert ein $x \in U_2 \setminus U_1$, dann ist $U_1 \subset U_2$.

35. Aufgabe: (2+2P)

a) (U1): Seien A, B zwei spurfreie Matrizen. Dann gilt $\mathrm{Sp}(A + B) = \sum_{k=0}^{n}(a_{kk} + b_{kk}) = \sum_{k=0}^{n} a_{kk} + \sum_{k=0}^{n} b_{kk} = 0 + 0 = 0$, also $A + B \in \mathcal{S}$.
(U2): $\mathrm{Sp}(0) = \sum_{k=0}^{n} 0 = 0$, also $0 \in \mathcal{S}$.
(U3): Sei $r \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{S}$, dann: $\mathrm{Sp}(r \cdot A) = \sum_{k=0}^{n} ra_{kk} = r \sum_{k=0}^{n} a_{kk} = r \cdot 0 = 0$, also $r \cdot A \in \mathcal{S}$.

b) Wir definieren folgende Matrizen: für $i \neq j$ sei $E_{ij} = (e_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$, wobei

$$e_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k = i \text{ und } l = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $i = 1, \ldots, n - 1$ definieren wir $F_i = (f_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$, wobei

$$f_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k = l = i \\ -1 & \text{wenn } k = l = i + 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist klar, daß die E_{ij} und F_i spurfreie Matrizen sind.

Seien nun $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, mit $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ und $i \neq j$ und β_i, $i = 1, \dots, n-1$ so daß

$$\sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \alpha_{ij} E_{ij} + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k F_k = 0.$$

Dann gilt komponentenweise:

$$\alpha_{ij} = 0$$

für $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ und $i \neq j$ und

$$\beta_{k+1} - \beta_k = 0 \quad \text{für } 1 \leq k < n-1 \quad \text{und} \quad \beta_0 = \beta_{n-1} = 0.$$

Im Falle $n > 2$ gilt für $1 \leq l < n-2$:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{k=1}^{l} (\beta_{k+1} - \beta_k) &= \sum_{k=1}^{l} \beta_{k+1} - \sum_{k=1}^{l} \beta_k \\ &= \beta_{l+1} - \beta_1 \\ &= \beta_{l+1} \end{aligned}$$

und deshalb $b_{l+1} = 0$ für alle $1 \leq l < n-2$.

Seien nun $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ und $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, mit $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ und $i \neq j$ und β_i, $i = 1, \dots, n-1$ so daß

$$\sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \alpha_{ij} E_{ij} + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k F_k = A.$$

Dann folgt komponentenweise:

$$\alpha_{ij} = a_{ij}, \quad \beta_1 = a_{11}, \quad \beta_{n-1} = -a_{nn} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii},$$

wobei $i \neq j$ (die letzte Gleichung folgt aus $\mathrm{Sp}(A) = 0$). Für $1 < l < n-2$ gilt:

$$\sum_{k=2}^{l} a_{kk} = \sum_{k=1}^{l} (\beta_{k+1} - \beta_k) = \beta_{l+1} - \beta_1,$$

also $\beta_{l+1} = \sum_{k=1}^{l} a_{kk}$. Somit folgt, daß die Koeffizienten α_{ij}, β_k eindeutig festgelegt sind. Analog wie in Aufgabe 32 folgert man, daß jede Matrix A als Linearkombination der E_{ij} und der F_l dargestellt werden kann, wobei die $\alpha_{ij} = a_{ij}$ und $\beta_l = \sum_{k=1}^{l} a_{kk}$, $\beta_{n-1} = -a_{nn} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}$ (da A spurfrei).