7. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA I (WS 2004/05)

Abgabe: Do. 2.12.2004, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1–3 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 4–5 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

In den folgenden Aufgaben sei stets die Wahl eines kartesischen Koordinatensystems $(N, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vorausgesetzt.

21. Aufgabe: Gegeben sei ein Punkt P, repräsentiert durch den Vektor $\vec{p}$, und eine Ebene E, welche gegeben ist durch die Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}$, wobei $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Vektoren und $r, s \in \mathbb{R}$. Berechne den Abstand von P zu E in folgenden Fällen:

a) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (4)

22. Aufgabe: Betrachte die Ebenen E_1 und E_2, gegeben durch die Parameterdarstellungen $E_1 : \vec{x} + r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2$, $E_2 : \vec{y} + s_1\vec{w}_1 + s_2\vec{w}_2$. Hierbei sind $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ und die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2$ sind gegeben durch:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$ und gib ggf. eine Parameterdarstellung an.

b) Gib die Ebenen E_1 und E_2 in Hessescher Normalform an.

c) Bestimme den Winkel zwischen E_1 und E_2. (5)

23. Aufgabe: Seien $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ Vektoren, $a \in \mathbb{R}$. Beweise unter Benutzung der Koordinatendarstellung folgende Eigenschaften des Vektorprodukts:

a) $\vec{v} \times \vec{w} = -(\vec{w} \times \vec{v})$

b) $a(\vec{v} \times \vec{w}) = (a\vec{v}) \times \vec{w}$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$. (5)

24. Aufgabe: Seien $\vec{v}$, $\vec{w}$ Vektoren. Beweise: $(-\vec{v}) \times (-\vec{w}) = \vec{v} \times \vec{w}$. (2)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/~chris