4. Übungsblatt

**LINEARE ALGEBRA I (WS 2004/05)**

**Abgabe: Do. 11.11.2004, bis 13.00 Uhr**

Gruppen 1–3 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 4–5 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

**9. Aufgabe:** In Aufgabe 2 wurde bewiesen: Zu beliebigen ganzen Zahlen $a$ und $n$ mit $n > 0$ gibt es ganze Zahlen $q$ und $r$ mit folgenden Eigenschaften

$$a = qn + r \quad \text{und} \quad 0 \le r < n$$

(Diese Zahlen $q$ und $r$ sind dadurch sogar eindeutig bestimmt). Man bezeichnet diesen Sachverhalt als "Division mit Rest in $\mathbb{Z}$" und nennt $r$ den "Rest bei Division von $a$ durch $n$". Man schreibt auch $r =: a \bmod n$.

Auf der Menge $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ seien eine Addition $\oplus$ und eine Multiplikation $\odot$ definiert durch

$$x \oplus y := (x + y) \bmod n \quad , \quad x \odot y := (x \cdot y) \bmod n \quad (x, y \in \mathbb{Z}_n)$$

Beweise:

**a)** $(a + kn) \bmod n = a \bmod n$ für alle $a, k \in \mathbb{Z}$

**b)** Für $\oplus$ gilt das Assoziativ–Gesetz

**c)** $x \oplus 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{Z}_n$

**d)** Zu $x \in \mathbb{Z}_n$ existiert ein $y \in \mathbb{Z}_n$ mit $x \oplus y = 0$

**e)** Gibt es zu $2 \in \mathbb{Z}_{14}$ ein $x \in \mathbb{Z}_{14}$ mit $2 \odot x = 1$? (Die Antwort ist zu begründen!) (5)

**10. Aufgabe:** $M, N, P$ seien Mengen.

**a)** Beweise: $(M \cap N) \cup P = M \cap (N \cup P) \iff P \subseteq M$

**b)** Welche Teilmengenbeziehung gilt zwischen den Mengen $(M \setminus N) \setminus P$ und $M \setminus (N \setminus P)$? Müssen sie gleich sein? Begründe alle Antworten. (4)

**11. Aufgabe:** Seien $r, s \in \mathbb{R}$ und $\vec{v}$ ein Vektor im Anschauungsraum $\mathsf{A}$. Beweise nur unter Verwendung von (4.1) und (4.2) mit genauer Angabe der benutzten Rechnenregeln:

**a)** $\vec{v} + \vec{v} = \vec{v} \implies \vec{v} = \vec{o}$ **b)** $r\vec{o} = \vec{o}$

**c)** $0\vec{v} = \vec{o}$ **d)** $r\vec{v} = \vec{o} \implies (r = 0 \lor \vec{v} = \vec{o})$

**e)** $-(r\vec{v}) = (-r)\vec{v}$ **f)** $r\vec{v} = s\vec{v} \implies (r = s \lor \vec{v} = \vec{o})$ (5)

---