13. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA I (WS 2004/05)

Abgabe: Do. 27.1.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1–3 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 4–5 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

44. Aufgabe: Zeige:

a) Seien a, b Vektoren in $\mathbb{R}^2$, wobei $a = \binom{\alpha_1}{\alpha_2}$ und $b = \binom{\beta_1}{\beta_2}$. a und b sind linear unabhängig genau dann, wenn gilt: $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$.

b) Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit 3 Elementen ist linear abhängig.

c) Jede Basis von $\mathbb{R}^2$ hat genau zwei Elemente. (4)

45. Aufgabe: Sei V ein Vektorraum und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i < j$ definiere $w_{ij} := v_i - v_j$. Bestimme eine Basis des von $\{w_{ij} \mid i < j\}$ erzeugten Untervektorraumes von V. Ergänze diese Basis zu einer Basis von V. (4)

46. Aufgabe: Die Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ habe die Spalten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$, und sei $b \in \mathbb{R}^m$. Beweise:

a) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn gilt: $b \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(a_1, \dots, a_n)$.

b) Die Vektoren $a_1, \dots, a_n$ bilden genau dann ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^m$, wenn das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar ist.

c) Die Vektoren $a_1, \dots, a_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn das homogene Gleichungssystem $Ax = 0_m$ eindeutig lösbar ist. (5)

47. Aufgabe: Sei $V = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Für die Teilmengen $U_1 := \{f \in V \mid f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$ und $U_2 := \{f \in V \mid f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$ zeige:

a) U_1 und U_2 sind Untervektorräume von V.

b) $U_1 + U_2 = V$, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. (3)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜chris

Klausurtermin: Fr, 11.2.2005, 9.00–12.00 Uhr