10. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA I (WS 2004/05)

Abgabe: Do. 23.12.2004, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1–3 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 4–5 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

32. Aufgabe: In dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ $(n > 0)$ seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} v_n^1 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix}$ in Koordinatendarstellung gegeben durch:

$$v_i^j = \begin{cases} 1 & \text{für } j = i, i+1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n-1$$

und

$$v_n^j = \begin{cases} 1 & \text{für } j = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, daß die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind und daß sich jedes Element $w \in \mathbb{R}^n$ in eindeutiger Weise als Linearkombination der $v_1, \ldots, v_n$ darstellen läßt. (2)

33. Aufgabe: Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & \lambda x_3 & & & = & 2 - \mu. \end{array}$$

Beschreibe die Lösungsmenge dieses Gleichungssytems in Abhängigkeit von μ und λ. Welche Möglichkeiten gibt es? (3)

34. Aufgabe: Seien V ein Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V. Zeige:

a) $U_1 \cap U_2$ ist ein Untervektorraum von V.

b) $U_1 + U_2 = \{x + y \mid x \in U_1, y \in U_2\}$ ist ein Untervektorraum von V.

c) Ist $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von V, dann gilt: $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$. (6)

35. Aufgabe: Sei $A = (a_{ik})_{i,k=1,\ldots,n}$ eine $(n \times n)$-Matrix. Dann ist die *Spur* von A definiert als:

$$\mathrm{Sp}(A) := \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

a) Zeige: die Menge $\mathcal{S}$ aller Matrizen A mit $\mathrm{Sp}(A) = 0$ ist ein Untervektorraum des Vektorraumes der $(n \times n)$-Matrizen.

b) Gib eine Menge $\{E_1, \ldots, E_m\}$ von $(n \times n)$-Matrizen an, so daß $E_1, \ldots, E_m$ linear unabhängig sind und jede Matrix aus $\mathcal{S}$ sich eindeutig als Linearkombination von $E_1, \ldots, E_m$ darstellen läßt (Hinweis: $m = n^2 - 1$ — warum?). (4)